Analiza I

Josip Globevnik

Miha Brojan

27. april 2012

Predgovor

Pred vami je prva verzija skript za predmet Analiza 1, namenjenih študentom univerzitetnega študija matematike na Univerzi v Ljubljani. Upava, da bodo skripta študentom v pomoč, niso pa mišljena kot nadomestilo za predavanja. Študentom matematike priporočava, da redno hodijo na predavanja, saj sva prepričana, da mahanje z rokami, skakanje pred tablo in dodatni komentarji običajno pripomorejo, da je na predavanjih snov razložena bolje, izčrpneje in bolj razumljivo kot v skriptih. Pa tudi vsako leto ne predavamo popolnoma enako.

Snov je predstavljena približno tako, kot je bila predavana v zadnjih letih. Vsebina predavanj je v skladu s predpisanim učnim načrtom, naslanja pa se tudi na predavanja profesorjev Ivana Vidava in Jožeta Vrabca, ki sta ta predmet predavala v preteklosti. Zahvala jima gre za vse, kar smo se naučili od njiju.

V skriptih je tudi nekaj rešenih primerov nalog. Veliko več nalog bodo študenti naredili na vajah, kjer bodo dobili še nadaljnje naloge za samostojno delo doma. Študentom priporočava, da redno hodijo na vaje in z reševanjem nalog nadaljujejo doma.

Kljub temu, da je bilo gradivo pregledano, boste gotovo našli v njem napake. Vesela bova, če naju boste nanje opozorili. Študentom želiva veliko veselja in uspeha pri študiju matematike in da bi, tako kot midva, uživali v njeni lepoti in notranji skladnosti, in nič manj v njeni uporabnosti.

Zahvaljujeva se študentom, ki so naju opozorili na napake ob pripravi skript, še posebej Ninu Bašiću, Dejanu Širaju in Tini Rihar.

Josip Globevnik, Miha Brojan

Ljubljana, oktober 2006.

josip.globevnik@fmf.uni-lj.si

miha.brojan@gmail.com

Kazalo

Predgovor **i**

1 Števila **1**

1.1 Naravna števila $\mathbb{N}$ 1

1.2 Cela števila $\mathbb{Z}$ 1

1.3 Racionalna števila $\mathbb{Q}$ 2

1.4 Dedekindov aksiom, realna števila 8

1.4.1 Osnovni izrek o obstoju realnih števil 11

1.4.2 Posledice Dedekindovega aksioma 14

1.4.3 Intervali 15

1.4.4 Decimalni ulomki 15

1.5 Peanovi aksiomi 17

1.6 Absolutna vrednost 18

1.7 Kompleksna števila $\mathbb{C}$ 21

1.7.1 Geometrijska interpretacija kompleksnega števila 28

2 Zaporedja **31**

2.1 O množicah in preslikavah 31

2.2 Zaporedja števil 33

2.3 Stekališča zaporedja 35

2.4 Konvergentna zaporedja 36

2.5 Monotona zaporedja 41

2.6 Računanje z zaporedji 44

2.7 Zgornja in spodnja limita, limita $+\infty$, $-\infty$ 47

2.8 Definicija potence pri realnem eksponentu 51

2.9 Nekaj posebnih zaporedij 58

2.10 Zaporedja kompleksnih števil 61

2.11 Pojem (neskončne) vrste 63

3 Funkcije realne spremenljivke **65**

3.1 Definicija funkcije, graf funkcije 65

3.2 Osnovne operacije s funkcijami 68

3.2.1 Kompozitum funkcij, inverzna funkcija 68

3.2.2 Nadaljnje operacije s funkcijami 70

3.3 Zveznost funkcije 72

3.4 Enakomerna zveznost 77

3.5 Osnovne lastnosti zveznih funkcij 80

3.6 Monotone zvezne funkcije 83

3.7 Zveznost posebnih funkcij 84

3.8 Limita funkcije 87

4 Odvod **95**

4.1 Definicija in računanje odvoda 95

4.1.1 Geometrijski pomen odvoda 96

4.1.2 Pravila za odvajanje 99

4.1.3 Odvod kompozituma 101

4.1.4 Odvodi elementarnih funkcij 102

4.2 Diferenciabilnost in diferencial funkcije 109

4.3 Odvodi višjega reda 112

4.4 Rolleov in Lagrangeev izrek 114

4.5 Ekstremi funkcij 118

4.5.1 Strategija iskanja ekstremov dane funkcije 119

4.6 Konveksnost in konkavnost funkcij 123

4.7 Skiciranje grafa funkcije 126

4.8 L'Hospitalovi pravili 129

4.9 Uporaba odvoda v geometriji v ravnini 134
4.9.1 Kartezične koordinate, polarne koordinate 134
4.9.2 Krivulje v ravnini 136

5 Integral **147**
5.1 Nedoločeni integral ali primitivna funkcija 147
5.1.1 Nedoločeni integral elementarnih funkcij 149
5.1.2 Pravila za integriranje 150
5.1.3 Metode za računanje nekaterih nedoločenih integralov . . 153
5.2 Določeni integral 157
5.3 Darbouxove vsote 161
5.4 Lastnosti določenega integrala 171
5.5 Določeni integral kot funkcija zgornje meje 174
5.6 Osnovni izrek integralnega računa-Leibnizeva formula 178
5.7 Povprečje funkcije 181
5.8 Uvedba nove spremenljivke v določeni integral 182
5.9 Izreki o povprečjih 186
5.10 Posplošeni integrali 189
5.10.1 Eulerjeva Γ-funkcija 198
5.10.2 Absolutna konvergenca integrala 200
5.11 Uporaba integrala v geometriji 200
5.11.1 Dolžina poti 200
5.12 Ploščine likov v ravnini 210
5.12.1 Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij 210
5.12.2 Grafični pomen določenega integrala 213
5.12.3 Ploščina izseka, ko je krivulja dana v polarnih koordinatah 213

6 Vrste **217**
6.1 Številske vrste 217
6.2 Vrste z nenegativnimi členi 220
6.3 Vrste s členi poljubnega predznaka, absolutna konvergenca 229
6.4 O preureditvi vrste 230

6.5 Alternirajoče vrste 233

6.6 Množenje vrst 234

6.6.1 Opomba o dvakratnih vrstah 236

6.7 Funkcijska zaporedja in vrste 236

6.7.1 Geometrijska interpretacija enakomerne konvergence . . . 238

6.8 Integriranje in odvajanje funkcijskih vrst 241

6.9 Potenčne vrste 243

7 Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta 251

7.1 Taylorjeva formula 251

7.2 Taylorjeva vrsta 255

7.3 Taylorjeve vrste elementarnih funkcij 257

7.3.1 Eksponentna funkcija 258

7.3.2 Trigonometrične funkcije 259

7.3.3 Logaritemska funkcija 260

7.3.4 Binomska vrsta 260

8 Metrični prostori 263

8.1 Definicija in osnovne lastnosti 263

8.2 Zaporedja točk v metričnih prostorih 271

8.3 Kompaktne množice in kompaktni prostori 274

8.4 Podprostori metričnega prostora 278

8.5 Preslikave med metričnimi prostori 280

8.6 Banachovo skrčitveno načelo v polnih metričnih prostorih 283

8.7 Nadaljnji primeri metričnih prostorov 287

Poglavje 1

Števila

1.1 Naravna števila $\mathbb{N}$

Z ***naravnimi števili*** štejemo. Na množici naravnih števil

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$$

sta naravno definirani računski operaciji:

$$+ \text{ seštevanje,}$$
$$\cdot \text{ množenje.}$$

Pravimo, da je množica naravnih števil ***zaprta*** za seštevanje in množenje, saj sta vsota $a+b$ in podukt $a \cdot b$ poljubnih naravnih števil a in b tudi naravni števili. Naravnih števil ne moremo poljubno odštevati, saj npr. $5-7$ ni naravno število. Množico naravnih števil vložimo v množico celih števil.

1.2 Cela števila $\mathbb{Z}$

Računske operacije z množice naravnih števil $\mathbb{N}$ razširimo na množico ***celih števil*** $\mathbb{Z}$. Na množici celih števil

$$\mathbb{Z} = \{\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots\}$$

definiramo tri računske operacije:

$$+ \text{ seštevanje,}$$
$$\cdot \text{ množenje,}$$
$$- \text{ odštevanje.}$$

Pravimo, da je množica celih števil zaprta za seštevanje, množenje in odštevanje, saj so vsota $a+b$, podukt $a \cdot b$ in razlika $a-b$ poljubnih celih števil a in b tudi cela števila. Celih števil ne moremo poljubno deliti, npr. saj $7/6$ ni celo število. Množico celih števil vložimo v množico racionalnih števil.

1.3 Racionalna števila $\mathbb{Q}$

Racionalna števila (ulomki) so kvocienti celih števil.

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\} \right\}$$

Pri tem bomo upoštevali, da kvocienta a/b in c/d predstavljata isto racionalno število, kadar sta celi števili ad in bc enaki, torej

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad ad = bc.$$

V množici $\mathbb{Q}$ lahko seštevamo in množimo. Vsoto racionalnih števil definiramo

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd},$$

produkt racionalnih števil pa

$$\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}.$$

V nadaljevanju bomo spoznali osnovne lastnosti računanja z racionalnimi števili. Formulirali jih bomo tako, da bomo lahko iz njih izpeljali vse druge računske lastnosti. Zato jih bomo imenovali ***aksiomi***.

Aksiomi

(i) Lastnosti seštevanja:

A1 ***asociativnost*** **-** Za poljubna tri števila a, b, c velja:

$$(a+b)+c = a+(b+c).$$

A2 ***komutativnost*** **-** Za poljubni števili a, b velja:

$$a+b = b+a.$$

A3 ***enota za seštevanje*** **-** Obstaja takšno število 0, da za poljubno število a velja:

$$a+0 = a.$$

A4 ***inverzni element*** **(*nasprotno število*) -** Za vsako število a obstaja nasprotno število, ki ga označimo z $-a$, da velja:

$$a+(-a) = 0.$$

Trditev 1 *Za dano število a je nasprotno število eno samo.*

Dokaz: Naj bo dano število a. Denimo, da obstajata dve nasprotni števili b in c. Torej $a+b=0$ in $a+c=0$. Ker velja

$$\begin{aligned} c+(a+b) &= c+0 \\ &\stackrel{A3}{=} c \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} c+(a+b) &\stackrel{A1}{=} (c+a)+b \\ &\stackrel{A2}{=} (a+c)+b \\ &= 0+b \\ &\stackrel{A2}{=} b+0 \\ &\stackrel{A3}{=} b, \end{aligned}$$

sledi, da je $c=b$. Torej je nasprotno število eno samo. □

Trditev 2 *Iz enakosti $a+x = a+y$ sledi $x=y$, tj. velja* ***pravilo krajšanja***.

Dokaz:

$$\begin{aligned}
a+x=a+y \quad &\Rightarrow \quad -a+(a+x)=-a+(a+y)\\
&\overset{A1}{\Rightarrow} \quad \big((-a)+a\big)+x=\big((-a)+a\big)+y\\
&\overset{A2}{\Rightarrow} \quad \big(a+(-a)\big)+x=\big(a+(-a)\big)+y\\
&\overset{A4}{\Rightarrow} \quad 0+x=0+y\\
&\overset{A2}{\Rightarrow} \quad x+0=y+0\\
&\overset{A3}{\Rightarrow} \quad x=y
\end{aligned}$$

□

Posledica 1 *Velja enakost* $-0=0$.

Dokaz: $0+(-0)\overset{A4}{=}0$, $0+0\overset{A3}{=}0$, torej $0+(-0)=0+0$. Po pravilu krajšanja sledi $-0=0$. □

Racionalna števila lahko poljubno odštevamo. Naj bosta a in b dani racionalni števili. Iščemo takšen x, da velja:

$$b+x=a.$$

Levi in desni strani zgornje enakosti prištejemo $-b$.

$$\begin{aligned}
-b+(b+x)=-b+a \quad &\overset{A1}{\Rightarrow} \quad (-b+b)+x=-b+a\\
&\overset{A2}{\Rightarrow} \quad \big(b+(-b)\big)+x=-b+a\\
&\overset{A4}{\Rightarrow} \quad 0+x=-b+a\\
&\overset{A2}{\Rightarrow} \quad x+0=-b+a\\
&\overset{A3}{\Rightarrow} \quad x=-b+a\\
&\overset{A2}{\Rightarrow} \quad x=a+(-b)
\end{aligned}$$

Če rešitev obstaja, je to edina možna rešitev. Imenujemo jo tudi razlika števil a in b. Po navadi označimo

$$a+(-b)=a-b.$$

Poudariti želimo, da so vsa do sedaj našteta pravila posledica osnovnih pravil, tj. aksiomov A1 do A4.

(ii) Lastnosti množenja:

A5 ***asociativnost*** - Za poljubna tri števila a, b, c velja:

$$(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c).$$

A6 ***komutativnost*** - Za poljubni števili a, b velja:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

A7 ***enota za množenje*** - Za poljubno število a obstaja takšno število 1, da velja:

$$a \cdot 1 = a.$$

A8 ***inverzni element*** (***recipročno število***) - Vsako od 0 različno število a ima recipročno oz. obratno število, tj. število, ki ga označimo z a^{-1} ali $1/a$, $(a \neq 0)$, tako da velja:

$$a \cdot a^{-1} = 1.$$

Trditev 3 *Za dano število a je recipročno število eno samo.*

Dokaz: Naj bo dano število a, $a \neq 0$. Denimo, da obstajata dve recipročni števili, b in c. Torej $a \cdot b = 1$ in $a \cdot c = 1$. Ker velja

$$\begin{aligned} c \cdot (a \cdot b) &= c \cdot 1 \\ &\overset{A7}{=} c \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} c \cdot (a \cdot b) &\overset{A5}{=} (c \cdot a) \cdot b \\ &\overset{A6}{=} (a \cdot c) \cdot b \\ &= 1 \cdot b \\ &\overset{A6}{=} b \cdot 1 \\ &\overset{A7}{=} b, \end{aligned}$$

sledi, da je $c = b$. Torej je recipročno število eno samo. □

Trditev 4 *Če je $a \neq 0$, tedaj iz enakosti $a \cdot x = a \cdot y$ sledi $x = y$, tj. velja* ***pravilo krajšanja****.*

Dokaz:

$$\begin{aligned} a \cdot x = a \cdot y \quad &\Rightarrow \quad a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot y) \\ &\stackrel{A5}{\Rightarrow} \quad (a^{-1} \cdot a) \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot y \\ &\stackrel{A6}{\Rightarrow} \quad (a \cdot a^{-1}) \cdot x = (a \cdot a^{-1}) \cdot y \\ &\stackrel{A8}{\Rightarrow} \quad 1 \cdot x = 1 \cdot y \\ &\stackrel{A6}{\Rightarrow} \quad x \cdot 1 = y \cdot 1 \\ &\stackrel{A7}{\Rightarrow} \quad x = y \end{aligned}$$

□

Trditev 5 *Velja enakost* $1^{-1} = 1$.

Dokaz: $1 \cdot 1^{-1} \stackrel{A8}{=} 1$, $1 \cdot 1 \stackrel{A7}{=} 1$, torej $1 \cdot 1^{-1} = 1 \cdot 1$. Po pravilu krajšanja sledi $1^{-1} = 1$. □

V množici racionalnih števil $\mathbb{Q}$ lahko tudi delimo, tj. za dani števili a, b, $b \neq 0$, poiščemo takšen x, da je $x \cdot b = a$. Dobimo: $x = a \cdot b^{-1}$. Število x je torej ***kvocient*** in ga označimo z

$$a \cdot b^{-1} = \frac{a}{b} = a/b = a : b.$$

(iii) Ostale lastnosti:

A9 Števili 1 in 0 sta različni.

$$0 \neq 1$$

A10 ***distributivnost*** - Za poljubna tri števila a, b, c velja:

$$(a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c.$$

Distributivnost povezuje seštevanje in množenje. Velja pa tudi za odštevanje.

$$(a - b) \cdot c = a \cdot c - b \cdot c$$

V množici $\mathbb{Q}$ lahko torej izvajamo naslednje računske operacije:

$$+\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ :\ (\neq 0).$$

Množico števil, za katere veljajo aksiomi **A1**–**A10**, imenujemo komutativen ***obseg***. Množica $\mathbb{Q}$ je torej komutativen obseg. Na osnovi do sedaj naštetih aksiomov pa ne moremo pokazati, da je število 1 večje od števila 0. Definirati moramo še ***urejenost*** $(>, <, \leq, \ldots)$.

A11 Če število $a \neq 0$, je natanko eno od števil $-a$, a ***pozitivno*** število. Pri tem je potrebno poudariti, da število 0 ni niti pozitivno niti negativno število. Vsota in produkt pozitivnih števil sta pozitivni števili. Množica pozitivnih števil je torej zaprta za seštevanje in množenje.

Sedaj, ko imamo pojem pozitivnosti, lahko vpeljemo urejenost.

A12 Za števili a in b bomo rekli, da je a večje od b in pisali $a > b$, če je razlika $a - b$ pozitivno število. V posebnem primeru rečemo: a je pozitivno število natanko tedaj, ko velja: $a > 0$. Pri tem omenimo, da za dani števili a in b velja natanko ena od treh relacij:

$$a < b \quad \text{ali} \quad a = b \quad \text{ali} \quad a > b.$$

Če velja $a > b$ ali $a = b$ pišemo $a \geq b$ oz. za $a < b$ ali $a = b$ pišemo $a \leq b$.

Relacija urejenosti je ***tranzitivna***, torej iz

$$a > b \ \text{ in } \ b > c \ \text{ sledi } \ a > c.$$

To je posledica dejstva, da je vsota pozitivnih števil pozitivna.

Trditev 6

i) *če je* $a > b$ *tedaj je* $a + c > b + c$

ii) *če je* $a > b$ *in* $c > 0$ *tedaj je* $a \cdot c > b \cdot c$

iii) *če je* $a > b > 0$ *in* $c > d > 0$ *tedaj je* $ac > bd$

Dokaz:

i)

$$(a + c) - (b + c) = a - b > 0$$

ii)

$$\begin{aligned} a > b &\overset{A12}{\Rightarrow} a - b > 0 \\ c > 0 &\overset{A11}{\Rightarrow} (a - b) \cdot c > 0 \\ &a \cdot c - b \cdot c > 0 \\ &a \cdot c > b \cdot c \end{aligned}$$

iii)

$$\left.\begin{aligned} a > b,\ c > 0 &\overset{ii)}{\Rightarrow} a \cdot c > b \cdot c \\ c > d,\ b > 0 &\overset{ii)}{\Rightarrow} b \cdot c > b \cdot d \end{aligned}\right\} \overset{tranz.}{\Rightarrow} a \cdot c > b \cdot d$$

$\square$

V $\mathbb{Q}$ imamo torej definirane naslednje računske operacije:

$$+\ ,\ -\ ,\ \cdot\ ,\ :\ (\neq 0)$$

in relacijo urejenosti. Množica števil $\mathbb{Q}$ je torej urejen komutativen obseg.

1.4 Dedekindov aksiom, realna števila

Še vedno smo v množici racionalnih števil.

Definicija 1 *Množica števil $\mathcal{A}$ je navzgor omejena, če obstaja takšno število a, da je $x \leq a$, za vsak $x \in \mathcal{A}$. Vsakemu takšnemu številu a pravimo* ***zgornja meja*** *množice $\mathcal{A}$.*

Opomba: Če je množica navzgor omejena, ima neskončno mnogo zgornjih mej.

Z geometrijsko konstrukcijo lahko vsako racionalno število predstavimo kot točno določeno točko na številski premici.

Definicija 2 *Naj bo $\mathcal{A}$ navzgor omejena množica števil. Najmanjšo (če obstaja) od vseh zgornjih mej imenujemo* ***natančna zgornja meja*** *ali* ***supremum*** *množice $\mathcal{A}$. Torej je M natančna zgornja meja množice $\mathcal{A}$, če hkrati velja:*

i) M je zgornja meja množice $\mathcal{A}$, tj.

$$x \leq M \quad \textit{za vsak} \;\; x \in \mathcal{A}.$$

ii) če je $c < M$, c ni več zgornja meja, torej vsaj za en $y \in \mathcal{A}$ velja $c < y$.

Natančno zgornjo mejo označimo: $\sup \mathcal{A}$.

Podobno definiramo navzdol omejene množice in ***natančno spodnjo mejo*** *oz.* ***infimum****. Oznaka:* $\inf \mathcal{A}$.

Zgled: Naj bo $\mathcal{A}$ množica vseh nepozitivnih števil. Natančna zgornja meja je: $\sup \mathcal{A} = 0$. ♢

Opomba: Supremum je lahko v $\mathcal{A}$ ali pa tudi ne. V zgornjem zgledu je.

Zgled: Naj bo $\mathcal{A}$ množica vseh pozitivnih racionalnih števil, katerih kvadrat je manjši od 2, slika 1.1, tj.

$$\mathcal{A} = \{x \in \mathbb{Q} : x > 0, x^2 < 2\}.$$

$i)$ Množica $\mathcal{A}$ je neprazna, tj. $\mathcal{A} \neq \emptyset$, saj $1 \in \mathcal{A}$.

$ii)$ Pokažimo, da je množica $\mathcal{A}$ navzor omejena. Za $x \in \mathcal{A}$ velja $x^2 < 2 < 9$. Število 3 je zgornja meja. Zgornja meja torej obstaja.

$iii)$ Vsako pozitivno število a, za katerega velja $a^2 > 2$, je zgornja meja za $\mathcal{A}$. Če je $x \in \mathcal{A}$, je $x^2 < 2 < a^2$, torej $x < a$.

Nobeno pozitivno število a, za katerega velja $a^2 < 2$, ni zgornja meja za $\mathcal{A}$. Naj bo $a^2 < 2$. Tedaj je

$$\begin{aligned} q &= \frac{2a+2}{a+2} \\ &= a + \frac{2-a^2}{a+2} \\ &> a \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
q^2 - 2 &= \frac{4a^2 + 8a + 4}{a^2 + 4a + 4} - 2 \\
&= \frac{4a^2 + 8a + 4 - 2a^2 - 8a - 8}{(a+2)^2} \\
&= \frac{2a^2 - 4}{(a+2)^2} \\
&= \frac{2(a^2 - 2)}{(a+2)^2} \\
&< 0.
\end{aligned}
$$

Torej je $q^2 - 2 < 0$ oz. $q^2 < 2$, torej $q \in \mathcal{A}$. Vemo pa, da je $q > a$. Sledi, da a ni zgornja meja.

Če obstaja natančna zgornja meja M za $\mathcal{A}$, mora torej veljati

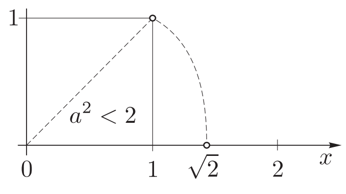
$$M^2 = (\sup \mathcal{A})^2 = 2.$$

Denimo, da je $\sup \mathcal{A} = M = m/n$, kjer sta m in n tuji si števili, tj. ulomek m/n je okrajšan.

$$M^2 = \left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2 \quad \Rightarrow \quad m^2 = 2n^2$$

Ker je $m^2 = 2n^2$, sledi, da je m sodo število, saj je kvadrat sodega števila vedno sodo število. Potem je leva stran deljiva s 4. Zaradi enakosti je tudi desna stran deljiva s 4, kar pa pomeni, da je tudi n sodo število. To pa je v protislovju s predpostavko, da sta m in n tuji si števili. Torej predpostavka $M = m/n$ je napačna, tj. število 2 ni kvadrat nobenega racionalnega števila. $\Diamond$

Torej množica števil $\mathcal{A}$ nima natančne zgornje meje v $\mathbb{Q}$. (Natančna zgornja meja je $\sqrt{2}$, ki pa ni racionalno število.)



Slika 1.1: $\sqrt{2}$ ni racionalno število

Za matematično analizo, ki bo uporabna v geometriji in fiziki, potrebujemo sistem števil, ki napolni vso številsko os. Zato k aksiomom A1-A12 dodamo še en aksiom, ki ta pogoj izpolni.

A13 ***Dedekindov aksiom*** - Vsaka neprazna navzgor omejena množica števil ima natančno zgornjo mejo.

Obseg racionalnih števil torej ne izpolnjuje aksioma A13. Kakšna števila pa izpolnjujejo tudi omenjeni aksiom, kako videti, da realna števila obstajajo, in kako jih konstruirati iz racionalnih števil, bomo spoznali v nadaljevanju.

1.4.1 Osnovni izrek o obstoju realnih števil

Izrek 1 *Obstaja urejen komutativen obseg števil* $\mathbb{R}$ *(tj. izpolnjuje A1–A12), ki izpolnjuje tudi aksiom A13 in vsebuje racionalna števila* $\mathbb{Q}$ *kot podobseg (tj.* $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ *in operacije seštevanja in množenja v* $\mathbb{R}$*, uporabljena na* $\mathbb{Q}$*, sovpada z že znanim seštevanjem in množenjem na* $\mathbb{Q}$*). Pozitivna števila v* $\mathbb{R}$*, ki so racionalna, so natanko* $\mathbb{Q}^+$*.* $\mathbb{R}$ *imenujemo obseg* ***realnih*** *števil.*

Opomba: Konstrukcijo realnih števil na osnovi racionalnih števil, ki jo bomo omenili, je prvi objavil nemški matematik Dedekind. Istočasno je drugačno konstrukcijo objavil Cantor. Dokaz zgornjega izreka bomo le skicirali.

Ideja o konstrukciji realnih števil sledi iz zgornjega zgleda. Recimo, da želimo na premici najti „število”, katerega kvadrat je 2. Da bi tako prišli do točke na številski osi, vsa racionalna števila prerežemo na dela, tj. tista, katerih kvadrat je manjši od 2 in tista, katerih kvadrat je večji (ali enak) 2, tj. na zgornji in spodnji razred. Vsako realno število torej razdeli številsko os (premico) na dva dela. Ker moramo takšen rez znati opisati le z racionalnimi števili, bomo rez identificirali z množico vseh racionalnih števil levo od reza:

Definicija 3 *Realno število je* ***rez****, ki razdeli racionalna števila na dva razreda. Naj bo* $\mathbb{R}$ *množica rezov. Rez (oz. presek) je množica racionalnih števil* $A \subset \mathbb{Q}$*, za katero velja:*

i) $A \neq \emptyset$ *in* $A \neq \mathbb{Q}$*.*

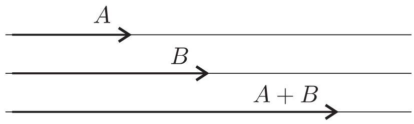
ii) če je $p \in A$ *in* $q < p$*, potem je* $q \in A$*.*

iii) *če je $p \in A$, obstaja tudi nek $r \in A$, da je $p < r$ (tj. A ne vsebuje največjega števila).*

Definicija 4 *Vsota rezov A in B, $A+B$ je množica vseh vsot oblike $r+s$, kjer je $r \in A$ in $s \in B$, slika 1.2.*

$$A + B = \{r + s :\ r \in A,\ s \in B\} = C$$

Rez 0^* je množica vseh negativnih racionalnih števil.



Slika 1.2: Vsota rezov A in B

Opomba: Pokažimo, da je C rez.

i) Naj bo $r_0 \in A$, $s_0 \in B$. Sledi $r_0 + s_0 \in C$ in od tod $C \neq \emptyset$. Če $r_1 \notin A$, $r_1 \notin B$, velja, da je r_1 zgornja meja za A in za B. Torej iz $x \in A : x < r_1$ in $y \in B : y < s_1$ sledi: $x + y \in C < r_1 + s_1 \notin C$.

ii) Naj bo $c \in C$ in $d < c$. Tedaj je $c = r + s$, $r \in A$, $s \in B$ in

$$\begin{aligned} d &= c + (d - c) \\ &= \underbrace{r}_{\in A} + \underbrace{(s + (d - c))}_{\in B} \in C. \end{aligned}$$

iii) Naj bo $c \in C$, tedaj je $c = r + s$, $r \in A$, $s \in B$.

$$\left.\begin{aligned} r \in A &\Rightarrow \exists r_2 \in A, r < r_2 \\ s \in B &\Rightarrow \exists s_2 \in B, s < s_2 \end{aligned}\right\} \quad r + s < r_2 + s_2 \in C$$

Tako definirana operacija seštevanja rezov je torej dobro definirana.

Diskusija: Pokazali smo, da je množica rezov $\mathbb{R}$ zaprta za seštevanje. Enota za seštevanje je $0^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < 0\}$. Pri tem je $A + 0^* = A$. Nasprotni element za seštevanje definiramo kot množico tistih p, za katere obstaja $r > 0$, da je $-p - r \notin A$, slika 1.3. Označimo ga z $-A$. Pri tem je $A + (-A) = 0^*$.

Slika 1.3: Nasprotni rez

Rez A imenujemo pozitiven, tj. $A > 0^*$, če je rez 0^* prava podmnožica reza A, tj. $0^* \subsetneqq A$. Za reza A, B pravimo, da je $A > B$, če je rez B prava podmnožica reza A.

Množenje pozitivnih rezov A, B definiramo takole: Produkt AB je množica takšnih p, da je $p \le rs$, za neka $r \in A$, $s \in B$, $r > 0$, $s > 0$. Množenje poljubnih rezov definiramo takole:

$$A \cdot B = \begin{cases} (-A) \cdot (-B), & \text{če je } \ A < 0^* \ \text{ in } \ B < 0^* \\ -\big((-A) \cdot B\big), & \text{če je } \ A < 0^* \ \text{ in } \ B > 0^* \\ -\big(A \cdot (-B)\big), & \text{če je } \ A > 0^* \ \text{ in } \ B < 0^* \\ \qquad \text{in } \ A \cdot 0^* = 0^* \cdot A = 0^*. \end{cases}$$

Pokažemo lahko, da je $\mathbb{R}$ zaprta tudi za množenje. Enota za množenje je $1^* = \{x \in \mathbb{Q} : x < 1\}$, pri tem je $A \cdot 1^* = A$. Za reza A in B velja natanko ena od možnosti $A < B$, $A = B$, $A > B$. Izkaže se, da množica rezov s temi operacijami izpolnjuje A1 do A12.

Pokažimo še, da tako definirana množica $\mathbb{R}$ z operacijami seštevanja in množenja ter urejenostjo zadošča aksiomu A13. Naj bo $\mathcal{A}$ neprazna in navzgor omejena množica v $\mathbb{R}$. Definirajmo $C = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Najprej pokažimo, da je C rez in $C = \sup \mathcal{A}$.

i) Ker je $\mathcal{A} \neq \emptyset$, obstaja $A \in \mathcal{A}$. Ker je $A \subset C$, tudi $C \neq \emptyset$. Po predpostavki je $\mathcal{A}$ navzgor omejena. Torej obstaja takšen rez B, da je $A \le B$ ($\le$ pri rezih pomeni $\subseteq$) za vsak $A \in \mathcal{A}$. Tedaj je $C \subset B$, saj je vsak A vsebovan v B, ker je B zgornja meja. Ker je B rez, obstaja $r \in \mathbb{Q}$, da $r \notin B$, zato $B \neq \mathbb{Q}$ in $C \neq \mathbb{Q}$.

ii) Naj bo $r \in C$, $C = \cup_{A \in \mathcal{A}} A$. Potem obstaja nek $A \in \mathcal{A}$, da je $r \in A$. Če je $s < r$, je $s \in A$, zato je tudi $s \in C$.

iii) Naj bo C rez, $C = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$, in $r \in C$. Potem obstaja nek $A \in \mathcal{A}$, da je $r \in A$. Če je $s \in A$ in $s > r$, potem je $s \in C$.

Sledi, da C izpolnjuje *i)*, *ii)* in *iii)*, torej je C res rez. Torej $C = \cup_{A\in\mathcal{A}} A$ in je rez. Po definiciji neenakosti $\leq$ pri rezih je $A \leq C$, za vsak $A \in \mathcal{A}$. Naj bo $D < C$. Tedaj je D prava podmnožica množice C, tj. $D \subset C$ in $D \neq C$. Tedaj obstaja $s \in C$, $s \notin D$. Ker je $s \in C$, je $s \in A$ za nek $A \in \mathcal{A}$. Ker je $s \notin D$, je D prava podmnožica množice A. Torej je $D < A$. Zato D ni več zgornja meja množice $\mathcal{A}$. Pokazali smo, da je C zgornja meja in če ga malo zmanjšamo (na D), potem ni več zgornja meja. Torej je C najmanjša zgornja meja, tj. $C = \sup \mathcal{A}$.

1.4.2 Posledice Dedekindovega aksioma

1. Vsaka navzdol omejena množica realnih števil ima natančno spodnjo mejo.

2. Množica celih števil $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena.

   Dokaz: Če bi bila, bi imela natančno zgornjo mejo M. Tedaj $M - 1$ ne bi mogla biti več zgornja meja. Potem bi obstajalo vsaj eno celo število $n > M - 1$. Sledi $n + 1 > M$. Ker je $n + 1 \in \mathbb{Z}$, M ne more biti zgornja meja. Torej $\mathbb{Z}$ ni navzgor omejena. □

3. Za vsak $a \in \mathbb{R}$ obstaja $b \in \mathbb{Z}$, da je $a < b$.

   Dokaz: Recimo, da obstaja a, da je $a > b$ za vsak $b \in \mathbb{Z}$. Potem je a zgornja meja od $\mathbb{Z}$, kar je protislovje s točko 2. □

4. Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ poljubni pozitivni števili. Tedaj obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $na > b$. (***arhimedska lastnost***)

   Dokaz: Po točki 3. obstaja celo število n, da je $n > b/a$. Torej je $na > b$.
   □

5. Naj bo $a > 0$. Obstaja $n \in \mathbb{N}$, da je $1/n < a$.

Dokaz: Po točki 3. obstaja $n > 1/a$, torej $1/n < a$. □

1.4.3 Intervali

Definicija 5 *Naj bosta $a, b \in \mathbb{R}$ takšna, da je $a < b$. Množico vseh $x \in \mathbb{R}$ med a in b imenujemo* ***interval****. Pri tem ločimo:*

i) odprt interval

$$(a, b) = \{x : x > a, x < b\},$$

ii) zaprt interval - odsek

$$[a, b] = \{x : x \geq a, x \leq b\},$$

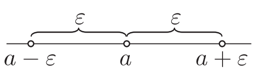
iii) polzaprt oz. polodprt interval

$$[a, b) = \{x : x \geq a, x < b\}$$

oz.

$$(a, b] = \{x : x > a, x \leq b\}.$$

Definicija 6 *Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ imenujemo* ***ε-okolica*** *števila a, slika 1.4.*



Slika 1.4: ε okolica števila a

1.4.4 Decimalni ulomki

Vsako realno število je mogoče zapisati kot (končni ali) neskončni ***decimalni ulomek***. Naj bo $x > 0$, $x \in \mathbb{R}$ in naj bo n največje celo število, ki ne presega števila x. Tedaj je $x \in [n, n+1)$. Po 3. posledici Dedekindovega aksioma takšno število obstaja. Interval $[n, n+1)$ razdelimo na deset delov. Poiščemo največje število n_1 tako, da velja

$$n + \frac{n_1}{10^1} \leq x.$$

Možnosti je deset, tj. $n_1 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Tako dobljeni interval $[n_1, n_1 + 1)$ razdelimo na deset delov. Poiščemo največje število n_2 tako, da velja

$$n + \frac{n_1}{10^1} + \frac{n_2}{10^2} \leq x.$$

Možnosti je deset, tj. $n_2 \in \{0, 1, \ldots, 9\}$. Tako nadaljujemo.

Izrek 2 *Naj bo $\mathcal{A}$ množica števil $\{n, n + \frac{n_1}{10}, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2}, \ldots, n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_k}{10^k}, \ldots\}$. Tedaj je $x = \sup \mathcal{A}$.*

Dokaz: Število x je natančna zgornja meja množice $\mathcal{A}$, če je x zgornja meja in ni nobene manjše. a) po definiciji števil iz $\mathcal{A}$ je vsako manjše ali enako x. Torej je x zgornja meja. b) S protislovjem: denimo, da obstaja $y < x$, da je tudi y zgornja meja. Naj bo

$$\frac{1}{10^k} \leq x - y < \frac{1}{10^{k-1}}.$$

Potem je za

$$z = n_0 + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{10^2} + \ldots + \frac{n_{k-1}}{10^{k-1}} + \frac{n_k}{10^k}$$
$$x - z = \frac{n_{k+1}}{10^{k+1}} + \ldots < \frac{1}{10^k},$$

kar pomeni $-y > -z$ oz. $y < z$. Potem y ni zgornja meja, kar je v protislovju z začetno predpostavko, da y je zgornja meja. □

Po navadi zapišemo

$$x = n, n_1 n_2 n_3 \ldots$$

oziroma

$$x = n + \frac{n_1}{10} + \frac{n_2}{100} + \ldots \quad .$$

Kaj pomeni desna stran, še ne poznamo. Spoznali bomo pozneje.

Posledica 2 *Racionalna števila so gosta povsod v $\mathbb{R}$. To pomeni, da med poljubnima različnima realnima številoma (če sta še tako blizu) najdemo racionalna števila.*

Dokaz: Naj bo $a < b$ in $x = (a+b)/2$, potem velja $a < x < b$. Razvijmo x v neskončni decimalni ulomek. Naj bodo $x_0, x_1, x_2, \ldots$ zaporedni decimalni približki za x.

$$\mathcal{A} = \{x_0, x_1, x_2, \ldots\}$$

Vemo: $x = \sup \mathcal{A}$. Ker je x natančna zgornja meja množice $\mathcal{A}$ in $a < x$, obstaja $x_m \in \mathcal{A}$, da je $x_m > a$. Torej je $a < x_m \leq x < b$ oz. $a < x_m < b$. Našli smo racionalno število x_m, ki je med a in b. □

Če si racionalna števila predstavljamo kot točke na številski premici, tedaj realna števila napolnijo vso premico. Da na premici nič ne manjka, je torej vsebina Dedekindovega aksioma.

Definicija 7 *Realna števila, ki niso racionalna, tj.* $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$*, imenujemo* ***iracionalna*** *števila. Realna števila, ki so rešitve kakšne algebraične enačbe*

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n = 0,$$

pri čemer so $a_j \in \mathbb{Q}$*,* $j \in \{0, 1, \ldots, n\}$ *racionalna števila, imenujemo* ***algebraična*** *števila. Takšno število je npr.* $\sqrt{2}$*. Vsa racionalna števila so algebraična. Realna števila, ki niso algebraična, imenujemo* ***transcendentna*** *števila, npr.* π*, e...*

1.5 Peanovi aksiomi

V aksiomih P1–P5 je italijanski matematik Peano formuliral osnovne lastnosti naravnih števil.

P1 1 je naravno število.

P2 Vsakemu naravnemu številu n sledi natanko določeno naravno število, ki ga imenujemo naslednik števila n in ga označimo z n^+.

P3 Iz $n \neq m$ sledi $n^+ \neq m^+$.

P4 Ševilo 1 ni naslednik nobenega naravnega števila.

P5 Vsaka množica naravnih števil, ki vsebuje 1 in je v njej s številom n vedno tudi n^+, vsebuje vsa naravna števila. (aksiom o ***popolni (matematični) indukciji***)

$$\left.\begin{array}{c} A \subseteq \mathbb{N} \\ 1 \in A \\ n \in A \Rightarrow n^+ \in A \end{array}\right\} \Rightarrow A = \mathbb{N}$$

Samo s pomočjo Peanovih aksiomov je mogoče v naravna števila vpeljati operaciji seštevanja in množenja z lastnostmi, ki jih poznamo.

Zgled: Ogledali si bomo, kako s pomočjo P1-P5 seštevamo in množimo. Naj bo $p \in \mathbb{N}$.

$$p+1=p^+,\ p+2=(p+1)^+,\ p+3=(p+2)^+,\ldots,p+k+1=(p+k)^+$$

Vemo, kaj pomeni številu p prišteti število 1. Če vemo, kaj pomeni prišteti k, znamo prišteti tudi $k+1$. Iz P5 sledi, da znamo prišteti poljubno število.

Zelo podobno vpeljemo množenje. Naj bo $p \in \mathbb{N}$.

$$p \cdot 1 = p,\ p \cdot 2 = p + p,\ p \cdot 3 = (p+p)+p,\ldots,p\cdot(k+1) = p \cdot k + p$$

Vemo, kaj pomeni zmnožiti število p s številom 1. Če vemo kaj pomeni zmnožiti s k, znamo zmnožiti tudi s $k+1$. Iz P5 sledi, da znamo k zmnožiti s poljubnim številom. $\diamondsuit$

Naravna števila $\mathbb{N}$ vložimo v $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}$ v $\mathbb{Q}$ in iz $\mathbb{Q}$ z rezi konstruiramo $\mathbb{R}$. Torej je mogoče realna števila konstruirati, če za osnovo vzamemo $\mathbb{N}$ z lastnostmi P1-P5.

1.6 Absolutna vrednost

Definicija 8 *Če je $x \in \mathbb{R}$, je*

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{če je } \ x \geq 0 \\ -x, & \text{če je } \ x \leq 0. \end{cases}$$

Nenegativno število $|x|$ imenujemo ***absolutna vrednost števila*** *x. Pri tem velja:*

i) $|x| \geq 0$

ii) $|x| = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 0$

iii) $|-x| = |x|$

iv) $-|x| \leq x \leq |x|$

v) na številski premici je $|x|$ razdalja od x do 0.

Trditev 7 *Za poljubni realni števili a in b velja*

$$|a + b| \leq |a| + |b|,$$

tj. tako imenovana ***trikotniška neenakost****.*

Dokaz: Če je vsaj eno od števil a in b enako 0, velja enačaj. Če sta a in b istega predznaka, tj. oba sta pozitivna ali oba sta negativna, tudi velja enačaj. Če pa sta a in b različnega predznaka, npr. $a > 0$ in $b < 0$, pa velja: $|a| = a$ in $|b| = -b$, torej $a + b = |a| - |b|$. Od tod sledi, da je $|a + b| = |a| - |b|$ ali $|a + b| = |b| - |a|$, odvisno od tega, katero od števil $|a| - |b|$ oz. $|b| - |a|$ je nenegativno. Ker je $|a| + |b| \geq |a| - |b|$ in tudi $|a| + |b| \geq |b| - |a|$, je v obeh primerih $|a + b| \leq |a| + |b|$. □

Trditev 8 *Za poljubni realni števili a in b velja:*

$$|ab| = |a||b|.$$

Dokaz: Dokaz sledi iz definicije absolutne vrednosti. □

Posledica 3 *Če so $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n$ realna števila, je*

$$|a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n| \leq |a_0| + |a_1| + |a_2| + \ldots + |a_n|.$$

Dokaz: Po trditvi velja: $|a_0 + a_1| \leq |a_0| + |a_1|$, torej posledica velja za $n = 1$. Denimo, da posledica velja za n. Tedaj je po trikotniški neenakosti

$$\begin{aligned}
|a_0 + a_1 + \ldots + a_n + a_{n+1}| &= |(a_0 + a_1 + \ldots + a_n) + a_{n+1}| \\
&\leq |a_0 + a_1 + \ldots + a_n| + |a_{n+1}| \\
&\leq |a_0| + |a_1| + \ldots + |a_n| + |a_{n+1}|
\end{aligned}$$

Torej posledica velja za $n + 1$. Po principu matematične indukcije je posledica dokazana. □

Posledica 4 *Za vsaki realni števili a, b je*

$$|a - b| \leq |a| + |b|.$$

Dokaz:

$$\begin{aligned}
|a - b| &= |a + (-b)| \\
&\leq |a| + |-b| \\
&= |a| + |b|
\end{aligned}$$

□

Posledica 5

$$\begin{aligned}
&i) \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a + b| \\
&ii) \quad \big||a| - |b|\big| \leq |a - b|
\end{aligned}$$

Dokaz: $i)$

$$|a| = |a + b - b| \leq |a + b| + |b|$$

$$(*) \quad |a| - |b| \leq |a + b|$$

$$|b| = |b + a - a| \leq |b + a| + |a|$$

$$(**) \quad |b| - |a| \leq |a + b|$$

Iz $(*)$ in $(**)$ sledi

$$\big||a| - |b|\big| \leq |a + b|$$

ii) Dokaz sledi iz *i*). $\square$

Zgled: Poišči množico rešitev neenačbe

$$\big|1 - |x-1|\big| < 1.$$

2. Za $x - 1 < 0$ je

$$|1 + x - 1| < 1$$
$$|x| < 1$$
$$-1 < x < 1$$

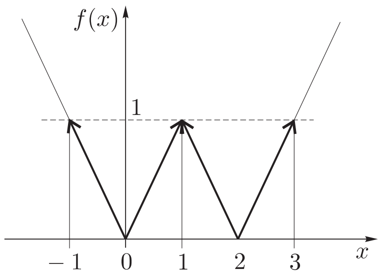
$\mathcal{R}_2 = (-1, 1)$

1. Za $x - 1 \geq 0$ je

$$|1 - x + 1| < 1$$
$$|2 - x| < 1$$
$$-1 < 2 - x < 1$$
$$-3 < -x < -1$$
$$1 < x < 3$$

$\mathcal{R}_1 = (1, 3)$

Množica rešitev zgornje neenačbe je $\mathcal{R} = \mathcal{R}_1 \cup \mathcal{R}_2 = (-1,1) \cup (1,3)$. Grafično rešitev najdemo na sliki 1.5.



Slika 1.5: Grafična rešitev neenačbe $\big|1 - |x-1|\big| < 1$

$\Diamond$

1.7 Kompleksna števila $\mathbb{C}$

Radi bi rešili enačbo oblike $x^2 = a$ za vsako realno število a, ne samo za $a \geq 0$. Zato moramo obseg realnih števil razširiti.

Definicija 9 ***Kompleksno število*** *je par realnih števil a, b v predpisanem vrstnem redu (a, b), tj. urejen par realnih števil (a, b). Množico kompleksnih števil* *označujemo s* $\mathbb{C}$.

Množica kompleksnih števil je $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Vpeljimo naslednje računske operacije:

Definicija 10 *Vsoto in produkt kompleksnih števil* (a, b) *in* (c, d) *zapišemo*

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Opomba: Kompleksni števili (a, b) in (c, d) sta enaki, tj. $(a, b) = (c, d)$, natanko tedaj, ko je $a = c$ in $b = d$.

Izrek 3 *Množica kompleksnih števil z vsoto in produktom kot zgoraj in elementom* $(0, 0)$ *kot enoto za seštevanje ter* $(1, 0)$ *kot enoto za množenje je obseg.*

Dokaz:

A1 $x = (a, b)$, $y = (c, d)$ in $z = (e, f)$.

$$\begin{aligned}(x + y) + z &= \big((a, b) + (c, d)\big) + z\\ &= (a + c, b + d) + (e, f)\\ &= (a + c + e, b + d + f)\\ &= (a, b) + (c + e, d + f)\\ &= (a, b) + \big((c, d) + (e, f)\big)\\ &= x + (y + z)\end{aligned}$$

A2 ...

A3 $x = (a, b)$

$$\begin{aligned}x + 0 &= (a, b) + (0, 0)\\ &= (a + 0, b + 0)\\ &= (a, b)\end{aligned}$$

A4 $x = (a, b)$ oz. $\quad -x = (-a, -b)$

A5

$$\begin{aligned}(x \cdot y) \cdot z &= \big((a,b) \cdot (c,d)\big) \cdot (e,f)\\ &= (ac - bd, ad + bc) \cdot (e,f)\\ &= (ace - bde - (adf + bcf), acf - bdf + ade + bce)\\ &= \big(a(ce - df) - b(cf + de), a(cf + de) + b(ce - df)\big)\\ &= (a,b) \cdot (ce - df, de + cf)\\ &= (a,b) \cdot \big((c,d) \cdot (e,f)\big)\\ &= x \cdot (y \cdot z)\end{aligned}$$

A6 ...

A7 $x \cdot 1 = (a,b) \cdot (1,0) = (a,b)$

A8 $x = (a,b) \neq (0,0) \;\Leftrightarrow\; a^2 + b^2 > 0$

$$x^{-1} = \frac{1}{x} = \left(\frac{a}{a^2+b^2}, \frac{-b}{a^2+b^2}\right)$$

$$\begin{aligned}x \cdot x^{-1} &= \left(\frac{a^2}{a^2+b^2} - \frac{-b^2}{a^2+b^2}, \frac{-ab}{a^2+b^2} + \frac{ab}{a^2+b^2}\right)\\ &= (1,0)\end{aligned}$$

A9 $(1,0) \neq (0,0)$

A10 ...

$\square$

Ker velja

$$(a,0) + (b,0) = (a+b,0)$$

$$(a,0) \cdot (b,0) = (ab,0),$$

enačimo kompleksna števila oblike $(a,0)$ z realnimi števili.

Definicija 11 *Število $i = (0,1)$ je **imaginarna enota**. Pri tem je*

$$\begin{aligned}i^2 &= (0,1) \cdot (0,1)\\ &= (-1,0)\\ &= -1.\end{aligned}$$

Kompleksno število lahko zato pišemo:

$$\begin{aligned} x &= (a, b) \\ &= (a, 0) \cdot (1, 0) + (b, 0) \cdot (0, 1) \\ &= a + ib, \end{aligned}$$

torej

$$x := a + ib.$$

Definicija 12 *Če sta a in b realni števili in $z = a + bi$, potem je*

$$a = \operatorname{Re} z$$

realni del kompleksnega števila *in*

$$b = \operatorname{Im} z$$

je ***imaginarni del kompleksnega števila*** *z. Poleg tega vpeljemo še* ***konjugirano kompleksno število*** *številu z, tj.*

$$\overline{z} = a - ib.$$

Pri tem

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \\ &= \sqrt{a^2 + b^2} \\ &= \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2}. \end{aligned}$$

$|z|$ imenujemo absolutna vrednost kompleksnega števila z.

Trditev 9 *Če je $z, w \in \mathbb{C}$, potem velja:*

1. $\overline{z + w} = \overline{z} + \overline{w}$,
2. $\overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w}$,
3. $\operatorname{Re} z = \dfrac{z + \overline{z}}{2}$ *in* $\operatorname{Im} z = \dfrac{z - \overline{z}}{2i}$.

Dokaz: Naj bo $z = a + ib$, $\overline{z} = a - ib$, $w = c + id$, $\overline{w} = c - id$

1.

$$\begin{aligned} z+w &= (a+ib)+(c+id) \\ &= a+c+i(b+d) \end{aligned}$$

$$\overline{z+w} = a+c-i(b+d)$$

$$\begin{aligned} \overline{z}+\overline{w} &= (a-ib)+(c-id) \\ &= a+c-i(b+d) \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} z\cdot w &= (a+ib)(c+id) \\ &= ac+iad+ibc-bd \\ &= (ac-bd)+i(ad+bc) \end{aligned}$$

$$\overline{z\cdot w} = (ac-bd)-i(ad+bc)$$

$$\begin{aligned} \overline{z}\cdot\overline{w} &= (a-ib)(c-id) \\ &= (ac-bd)-i(ad+bc) \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z+\overline{z} &= a+ib+a-ib = 2a \quad \Rightarrow \quad a = \operatorname{Re} z = \frac{z+\overline{z}}{2} \\ z-\overline{z} &= a+ib-a+ib = 2ib \quad \Rightarrow \quad b = \operatorname{Im} z = \frac{z-\overline{z}}{2i} \end{aligned}$$

$\square$

Trditev 10 *Naj bosta z, w kompleksni števili. Tedaj je:*

1. $|z| > 0$ *razen, ko je* $z = 0$,
2. $|\overline{z}| = |z|$,
3. $|z\cdot w| = |z|\,|w|$,

4. $|\operatorname{Re} z| \leq |z|$, $|\operatorname{Im} z| \leq |z|$,

5. $|z+w| \leq |z| + |w|$.

Dokaz:

1.

$$\begin{aligned} |z| &= \sqrt{z \cdot \overline{z}} \\ &= \sqrt{(a+ib)(a-ib)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &> 0 \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} |\overline{z}| &= \sqrt{\overline{z} \cdot \overline{\overline{z}}} \\ &= \sqrt{(a-ib)(a+ib)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= |z| \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} z \cdot w &= (a+ib)(c+id) \\ &= ac + iad + ibc - bd \\ &= ac - bd + i(ad+bc) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z \cdot w| &= \sqrt{\big(ac - bd + i(ad+bc)\big)\big(ac - bd - i(ad+bc)\big)} \\ &= \sqrt{(ac-bd)^2 + (ad+bc)^2} \\ &= \sqrt{a^2c^2 - 2abcd + b^2d^2 + a^2d^2 + 2abcd + b^2c^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |z|\ |w| &= \sqrt{(a+ib)(a-ib)}\sqrt{(c+id)(c-id)} \\ &= \sqrt{a^2+b^2}\sqrt{c^2+d^2} \\ &= \sqrt{(a^2+b^2)(c^2+d^2)} \end{aligned}$$

4.

$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + 0} = |\operatorname{Re}(z)|$$
$$|z| = \sqrt{(\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2} \geq \sqrt{0 + (\operatorname{Im} z)^2} = |\operatorname{Im}(z)|$$

5.

$$(*) \quad \operatorname{Re} z = \frac{z + \overline{z}}{2}$$
$$(**) \quad \overline{w \cdot \overline{z}} = \overline{w} \cdot \overline{\overline{z}} = \overline{w} \cdot z$$

$$\begin{aligned} |z+w|^2 &= (z+w) \cdot (\overline{z+w}) \\ &= (z+w) \cdot (\overline{z} + \overline{w}) \\ &= z \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot z + w \cdot \overline{z} + w \cdot \overline{w} \\ &\overset{(*)}{=} |z|^2 + |w|^2 + 2\operatorname{Re}(w \cdot \overline{z}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(w\overline{z}) &= \frac{w \cdot \overline{z} + \overline{w \cdot \overline{z}}}{2} \\ &\overset{(**)}{=} \frac{w \cdot \overline{z} + \overline{w} \cdot z}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \big(|z| + |w|\big)^2 &= |z|^2 + 2|z|\ |w| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + 2|\overline{z}|\ |w| + |w|^2 \\ &= |z|^2 + |w|^2 + 2|w \cdot \overline{z}| \end{aligned}$$

Od tod in točke 4. sledi

$$|z+w| \leq |z| + |w|.$$

□

Posledica 6

$$|z+w| \geq \big||z| - |w|\big|$$
$$|z-w| \geq \big||z| - |w|\big|$$

Dokaz: Iz

$$|z| = |(z+w) - w| \leq |z+w| + |w|$$

$$|w| = |(w+z) - z| \leq |z+w| + |z|$$

sledi

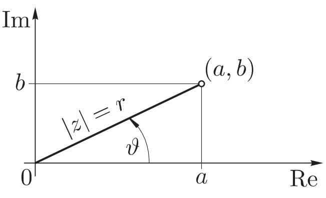
$$|z| - |w| \leq |z+w|$$

$$|w| - |z| \leq |z+w|$$

in od tod $\big||z| - |w|\big| \leq |z+w|$. Podobno pokažemo še $\big||z| - |w|\big| \leq |z-w|$ □

1.7.1 Geometrijska interpretacija kompleksnega števila

V kompleksni ravnini par $(a,b) \in \mathbb{C}$ ponazorimo s točko. Naj bo $z = a + ib$. Označimo $r = |z|$ in ϑ kot med realno osjo in daljico, ki povezuje koordinatno izhodišče in točko (a,b), slika 1.6.



Slika 1.6: Geometrijska interpretacija kompleksnega števila

Iz geometrije na sliki 1.6 sledi:

$$\begin{aligned} a &= \operatorname{Re} z \\ &= |z| \cos\vartheta \\ &= r\cos\vartheta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \operatorname{Im} z \\ &= |z| \sin\vartheta \\ &= r\sin\vartheta. \end{aligned}$$

Kot ϑ imenujemo ***argument kompleksnega števila***. Oznaka je

$$\arg z = \vartheta.$$

Kot ϑ je določen le do celega mnogokratnika 2π natančno. Običajno izberemo ϑ tako, da je $0 \leq \vartheta < 2\pi$. Kompleksno število $z = a + ib$ tedaj zapišemo kot

$$\begin{aligned} z &= |z| \cos \vartheta + i|z| \sin \vartheta \\ &= |z|(\cos \vartheta + i \sin \vartheta) \end{aligned}$$

Temu zapisu pravimo ***polarni zapis*** kompleksnega števila.

Oglejmo si, kako izgleda produkt dveh kompleksnih števil v polarnem zapisu. Naj bo $z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$ in $w = |w|(\cos \beta + i \sin \beta)$. Tedaj je

$$\begin{aligned} zw &= |z|\ |w|\ (\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) \\ &= |z|\ |w|\ \big((\cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta) + i(\sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta)\big) \end{aligned}$$

Ker je po adicijskih izrekih za kotne funkcije

$$\begin{aligned} \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta &= \cos(\alpha + \beta) \\ \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta &= \sin(\alpha + \beta), \end{aligned}$$

je torej

$$zw = |z|\ |w|\ \big(\cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta)\big).$$

V posebnem primeru je torej

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)(\cos \beta + i \sin \beta) = \cos(\alpha + \beta) + i \sin(\alpha + \beta),$$

od koder sledi t.i. ***de Moivreova formula***

$$(\cos \alpha + i \sin \alpha)^n = \cos n\alpha + i \sin n\alpha,$$

ki velja za vsak kot α in vsako naravno število n.

Če je n naravno število, števila z, ki rešujejo enačbo

$$z^n = 1,$$

imenujemo n***-te korene enote***. Z uporabo de Moivreove formule vidimo, da so to števila

$$\cos\frac{k2\pi}{n}+i\sin\frac{k2\pi}{n},\quad k\in\{0,1,\ldots,n-1\},$$

tj. točke na krožnici $\{z:|z|=1\}$, ki so oglišča pravilnega n-kotnika, katerega eno oglišče je v točki $(1,0)$.

Poglavje 2

Zaporedja

2.1 O množicah in preslikavah

Definicija 13 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici.* ***Preslikava*** *iz množice $\mathcal{A}$ v množico $\mathcal{B}$ je pravilo, ki vsakemu elementu iz množice $\mathcal{A}$ priredi natanko določen element množice $\mathcal{B}$. Pri tem pišemo*

$$f:\ \mathcal{A} \to \mathcal{B}$$
$$f:\ a \mapsto f(a)$$

Pravimo, da je f preslikava z $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$. Pri tem imenujemo množico $\mathcal{A}$ ***definicijsko območje*** *preslikave f, množico vseh elementov oblike $f(a)$, ko a preteče $\mathcal{A}$, pa* ***zalogo vrednosti*** *preslikave f. Definicijsko območje označimo tudi z $\mathcal{D}(f)$, torej $\mathcal{D}(f) = \mathcal{A}$, zalogo vrednosti pa z $\mathcal{R}(f)$, torej $\mathcal{R}(f) = \{f(a) : a \in \mathcal{A}\}$.*

Definicija 14 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici in $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ preslikava. Če je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{A}$, označimo z $f(\mathcal{E})$ množico vseh elementov iz $\mathcal{B}$, oblike $f(a)$, $a \in \mathcal{E}$. Množici $f(\mathcal{E})$ pravimo* ***slika*** *množice $\mathcal{E}$ s preslikavo f.*

Definicija 15 *Če je $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{B}$, je $f^{-1}(\mathcal{E})$ množica vseh takšnih $a \in \mathcal{A}$, da je $f(a) \in \mathcal{E}$. $f^{-1}(\mathcal{E})$ imenujemo* ***praslika*** *množice $\mathcal{E}$ pri preslikavi f oz.* ***inverzna slika****.*

Definicija 16 *Naj bo f preslikava z $\mathcal{A}$ v $\mathcal{B}$. $f(\mathcal{A})$ je zaloga vrednosti preslikave f. Če velja $f(\mathcal{A}) = \mathcal{B}$, pravimo, da je f* ***surjektivna*** *preslikava in pišemo*

$$f : \mathcal{A} \twoheadrightarrow \mathcal{B}.$$

Pravimo, da je f ***injektivna****, če iz $x, y \in \mathcal{A}$, $x \neq y$ sledi $f(x) \neq f(y)$. To označimo z*

$$f : \mathcal{A} \rightarrowtail \mathcal{B}$$

Preslikava, ki je hkrati surjektivna in injektivna, se imenuje ***bijektivna*** *oz. obratno enolična preslikava. Oznaka*

$$f : \mathcal{A} \rightarrowtail\!\!\!\!\rightarrow \mathcal{B}$$

Če je $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijektivna, potem zaradi surjektivnosti za vsak $b \in \mathcal{B}$ obstaja takšen $a \in \mathcal{A}$, da $f(a) = b$. Zaradi injektivnosti je takšen element en sam. Na ta način lahko definiramo preslikavo z $\mathcal{B}$ v $\mathcal{A}$, ki elementu $b \in \mathcal{B}$ priredi natanko določen element $a \in \mathcal{A}$, da je $f(a) = b$. Tako definirana preslikava se imenuje ***inverzna preslikava*** bijektivne preslikave f. Označimo jo z f^{-1}. Za $a \in \mathcal{A}$ in $b \in \mathcal{B}$ in bijektivno prelikavo f torej velja:

$$\begin{aligned} f &: \ \mathcal{A} \to \mathcal{B}, \quad f(a) = b, \\ f^{-1} &: \ \mathcal{B} \to \mathcal{A}, \quad f^{-1}(b) = a. \end{aligned}$$

Definicija 17 *Naj bosta $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ in $g : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$ preslikavi.* ***Kompozicija*** *oz.* ***kompozitum*** *preslikave f s preslikavo g je preslikava*

$$g \circ f : \mathcal{A} \to \mathcal{C},$$

definirana s predpisom

$$(g \circ f)(a) = g\big(f(a)\big).$$

Omenimo še ***identično preslikavo*** oz. ***identiteto***.

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

$$\mathrm{id}_{\mathcal{A}}(a) = a, \text{ za vse } a \in \mathcal{A}.$$

Zgled: Naj bo $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ bijekcija in $f^{-1} : \mathcal{B} \to \mathcal{A}$ njena inverzna preslikava. Tedaj velja:

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{B}},$$
$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathcal{A}}.$$

$\diamondsuit$

Definicija 18 *Množici $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ sta* ***ekvipolentni*** *oz. enako* ***močni****, če obstaja bijektivna preslikava $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$. Tedaj pravimo tudi, da imata isto* ***kardinalno število****.*

Definicija 19 *Množica je* ***števna****, če je* ***končna*** *ali* ***števno neskončna****. Končna množica je množica, ki ima končno mnogo elementov. Števno neskončna množica je množica, ki je ekvipolentna množici $\mathbb{N}$. Neskočna množica, ki nima iste moči kot $\mathbb{N}$, pa je* ***neštevna množica****.*

Izrek 4 *Končni množici sta ekvipolentni natanko tedaj, ko imata isto število elementov.*

Opomba: Množice $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$ in $\mathbb{Q}$ so števne množice (obstaja bijekcija), medtem ko $\mathbb{R}$ ni števna množica.

2.2 Zaporedja števil

Definicija 20 ***Zaporedje realnih števil*** *je preslikava iz $\mathbb{N}$ v $\mathbb{R}$.*

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}.$$

Običajno zapišemo

$$f(n) = a_n$$

Zaporedje običajno podajamo tako, da člene zaporedja zapišemo enega za drugim:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots,$$

včasih pa tako, da zapišemo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Število a_n imenujemo n-ti člen zaporedja.

Zgled:

1. $a_n = n, \qquad a_1 = 1,\, a_2 = 2, \ldots$

2. $a_n = (-1)^n, \qquad a_1 = -1,\, a_2 = 1, \ldots$

3.
$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sodo} \\ 1/n, & n \text{ je liho} \end{cases} \qquad a_1 = 1/1,\ a_2 = 2,\ a_3 = 1/3, \ldots$$

4. Zaporedje lahko podamo tudi rekurzivno, tj. tako, da povemo, kako se n-ti člen zaporedja izraža s predhodnimi členi. Poseben primer tako podanega zaporedja je t.i. ***Fibonaccijevo zaporedje***, ki je podano z

$$a_1 = a_2 = 1, \quad a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Zaporedje je torej

$$1, 1, 2, 3, 5, \ldots .$$

$\diamondsuit$

Definicija 21 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je navzgor omejeno, če je zaloga vrednosti preslikave $n \mapsto a_n$, $n \in \mathbb{N}$, navzgor omejena, tj., če obstaja takšen $M \in \mathbb{R}$, da je $a_n \leq M$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Podobno je definirano navzdol omejeno zaporedje.*

Definicija 22 *Natančna zgornja meja zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ki je navzgor omejeno, označimo jo s $\sup a_n = b$, je natančna zgornja meja množice vseh a_n. Torej je $b = \sup a_n$, če je*

i) $a_n \leq b$ *za vse* $n \in \mathbb{N}$,

ii) *Za vsak* $c < b$ *obstaja vsaj en* n_0, *da je* $a_{n_0} > c$.

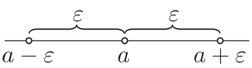
Definicija 23 *Naj bo dano zaporedje $a_1, a_2, a_3, \ldots$ in zaporedje naravnih števil $n_1, n_2, n_3, \ldots$, da velja $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$. Zaporedje*

$$a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$$

tedaj imenujemo podzaporedje zaporedja $a_1, a_2, a_3, \ldots$.

2.3 Stekališča zaporedja

Definicija 24 *Število a imenujemo* ***stekališče*** *zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če v vsaki (torej še tako majhni) okolici števila a leži neskončno mnogo členov zaporedja. Z drugimi besedami: a je stekališče $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$ za neskončno mnogo n-jev.*



Slika 2.1: ε-okolica števila a

Opomba: Beseda stekališče morda ni bila najbolj posrečeno izbrana, ker bi nas morda navedla na napačen sklep, da mora biti stekališče eno samo.

Ko pravimo „v okolici $\mathcal{U}$ leži neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$”, s tem povemo, da je $a_n \in \mathcal{U}$ za neskončno mnogo indeksov n. Ti členi med seboj niso nujno različni. Zaporedje $0, 0, 0, \ldots$, kjer je $a_n = 0$ za vse n, ima stekališče 0.

Izrek 5 *Če vsaka (še tako majhna) okolica števila a vsebuje nek člen zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, $a_n \neq a$, potem je a stekališče zaporedja.*

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$. Po predpostavki obstaja takšen člen zaporedja a_{n_1}, da velja:

$$a_{n_1} \neq a, \quad |a_{n_1} - a| < \varepsilon.$$

Po predpostavki obstaja takšen člen zaporedja a_{n_2}, da velja:

$$a_{n_2} \neq a, \quad |a_{n_2} - a| < |a_{n_1} - a| < \varepsilon.$$

Člene tega „zaporedja” dobimo induktivno. Denimo, da že imamo člene a_{n_1}, a_{n_2}, $\ldots$, a_{n_m}, za katere velja

$$0 < |a_{n_m} - a| < \ldots < |a_{n_2} - a| < |a_{n_1} - a| < \varepsilon.$$

Po predpostavki obstaja takšen člen zaporedja $a_{n_{m+1}}$, da velja:

$$a_{n_{m+1}} \neq a, \quad |a_{n_{m+1}} - a| < |a_{n_m} - a| < \ldots < |a_{n_1} - a| < \varepsilon.$$

□

Izrek 6 *Vsako na obe strani omejeno (na kratko: omejeno) zaporedje* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz: Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno, m neka njegova spodnja meja in M njegova natančna zgornja meja. Naj bo $\mathcal{U}$ množica vseh tistih $u \in \mathbb{R}$, da je neenakost $a_n < u$ izpolnjena za največ končno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, tj., da je levo od u največ končno mnogo členov zaporedja (torej lahko tudi za nobenega). Množica $\mathcal{U}$ ni prazna, ker vsebuje m. Zaporedje je navzgor omejeno, torej je navzgor omejena tudi $\mathcal{U}$. Množica $\mathcal{U}$ je torej neprazna in navzgor omejena. Po Dedekindovem aksiomu ima natančno zgornjo mejo, ki jo označimo z $a = \sup\mathcal{U}$. Če je $b \in \mathcal{U}$, iz lastnosti množice $\mathcal{U}$ sledi, da so vsa števila manjša od b tudi v $\mathcal{U}$. Vsa števila, manjša od a, so torej v množici $\mathcal{U}$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $a - \frac{\varepsilon}{2}$ v množici $\mathcal{U}$, $a + \frac{\varepsilon}{2}$ pa ni v njej, je na številski premici levo od $a - \frac{\varepsilon}{2}$ končno število členov zaporedja, levo od $a + \frac{\varepsilon}{2}$ pa jih je neskončno. Torej jih je neskončno tudi na intervalu $(a - \frac{\varepsilon}{2}, a + \frac{\varepsilon}{2})$, ki vsebuje vse člene od $a - \frac{\varepsilon}{2}$ do $a + \frac{\varepsilon}{2}$. Ker to velja za vsak $\varepsilon > 0$, je a res stekališče. □

2.4 Konvergentna zaporedja

Definicija 25 *Zaporedje* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira proti številu a, če v vsaki (še tako majhni) okolici števila a ležijo vsi členi zaporedja od nekega naprej, tj., če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja takšen* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da velja* $|a_n - a| < \varepsilon$ *za vsak* $n \geq n_0$*.*

Če zaporedje konvergira, pravimo, da je zaporedje ***konvergentno***. Število, h kateremu zaporedje konvergira, imenujemo ***limita*** zaporedja, in pišemo

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n.$$

Zaporedje, ki ne konvergira, imenujemo ***divergentno*** zaporedje in pravimo, da divergira.

Zgled:

1. zaporedje $a_n = (-1)^n$ divergira

2. zaporedje $a_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergira k 0, torej $\lim_{n\to\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{n} = 0$.

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$.

$$|a_n - 0| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{n} < \varepsilon$$

Vemo, da obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, torej za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

od koder sledi, da za vsak $n \geq n_0$ velja $|a_n - 0| < \varepsilon$. ♢

Zapomnimo si, da je vsaka limita zaporedja tudi stekališče zaporedja. Stekališče pa ni nujno limita, tudi če je eno samo.

Zgled: Oglejmo si zaporedje:

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sodo} \\ 1/n, & n \text{ je liho}, \end{cases}$$

s členi

$$\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots$$

Stekališče je eno samo, tj. 0, zaporedje pa ni konvergentno. ♢

Trditev 11 *Če zaporedje konvergira, ima natanko eno limito.*

Dokaz. Denimo, da ima zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dve limiti.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} a_n = b, \quad a \neq b.$$

Naj bo $\varepsilon = \frac{|a-b|}{4} > 0$. Tedaj je $\varepsilon > 0$ in okolici $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ in $(b-\varepsilon, b+\varepsilon)$ sta disjunktni, tj.

$$(a-\varepsilon, a+\varepsilon) \cap (b-\varepsilon, b+\varepsilon) = \emptyset.$$

Če je $x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)$, je

$$\begin{aligned}
|x-b| &= |x-a+a-b| \\
&\geq |a-b| - |x-a| \\
&> |a-b| - \varepsilon \\
&= \tfrac{3}{4}|a-b| \\
&> \tfrac{1}{4}|a-b|.
\end{aligned}$$

Od tod sledi $x \notin (b-\varepsilon, b+\varepsilon)$. Ker je a limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja: $|a_n - a| < \varepsilon$. Torej $|a_n - b| < \varepsilon$ velja kvečjemu za končno mnogo indeksov. Kar pa vodi v protislovje z dejstvom, da je b limita zaporedja. Sledi torej $a = b$, kar pomeni: če limita obstaja, je ena sama. $\square$

Zgled: Ugotovi, od katerega člena se vsi členi zaporedja $a_n = 1/2^{n-1}$ razlikujejo od limite za manj kot $\varepsilon = 10^{-2}$.

Limita $\ell = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 1/2^{n-1} = 0$. Najti moramo takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je neenakost $|a_n - \ell| < \varepsilon$ izpolnjena za vsak $n \geq n_0$. Sedaj $|a_n - \ell| < \varepsilon$ pomeni

$$\begin{gathered}
\left|\frac{1}{2^{n-1}} - 0\right| < 10^{-2}, \\
\frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-2}, \\
2^{n-1} > 100, \\
n - 1 > \frac{\log 100}{\log 2}, \\
n > 1 + \frac{\log 100}{\log 2} \approx 7,7.
\end{gathered}$$

Ker je

$$1 + \frac{\log 100}{\log 2} \approx 7,7,$$

pomeni, da za $n_0 = 8$ velja

$$n_0 > 1 + \frac{\log 100}{\log 2}$$

in torej za vsak $n \geq n_0$ velja

$$n > 1 + \frac{\log 100}{\log 2},$$

torej $|a_n - 0| < \varepsilon = 10^{-2}$. Sledi, da se od osmega člena naprej vsi členi našega zaporedja razlikujejo od limite za manj kot 10^{-2}. $\Diamond$

Opomba: Če zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k a, včasih pravimo, da „gre a_n proti a, ko gre n čez vse meje". Seveda pa to ne pomeni, da je za vsak n člen a_{n+1} bližje a, kot člen a_n.

Naravno vprašanje je, ali je mogoče samo s členi zaporedja (ne da bi omenili limito) povedati, kdaj je zaporedje konvergentno. Na to vprašanje odgovori izrek 7.

Definicija 26 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ izpolnjuje* ***Cauchyjev pogoj****, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za poljubna $n, m \geq n_0$.*

Opomba: Zgornje pomeni, da sta si dovolj pozna člena poljubno blizu. Zaporedje, ki zadošča Cauchyjevemu pogoju, je vedno omejeno. Zaporedju, ki izpolnjuje Cauchyjev pogoj, včasih kratko pravimo Cauchyjevo zaporedje.

Izrek 7 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ realnih števil je konvergentno natanko tedaj, ko izpolnjuje Cauchyjev pogoj.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Zaporedje konvergentno $\Rightarrow$ Cauchyjev pogoj. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno zaporedje. Naj bo $\varepsilon > 0$ in $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Tedaj obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $n \geq n_0$ velja: $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. Naj bosta $m, n \geq n_0$. Tedaj velja:

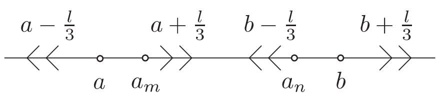
$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |(a_n - a) - (a_m - a)| \\ &\leq |a_n - a| + |a_m - a| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Za vsak $\varepsilon > 0$ smo torej našli n_0, da je $|a_n - a_m| < \varepsilon$ za poljubna $n, m \geq n_0$. Zaporedje torej izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

($\Leftarrow$) Cauchyjev pogoj $\Rightarrow$ zaporedje konvergentno. Naj zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zadošča Cauchyjevemu pogoju. Tedaj je zaporedje omejeno. Za $\varepsilon_0 = 1$ obstaja

$n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n, m \geq n_0$ velja $|a_n - a_m| < 1$. V posebnem primeru velja $|a_n - a_{n_0}| < 1$. Zato vsi členi zaporedja od člena a_{n_0} naprej ležijo na intervalu $(a_{n_0} - 1, a_{n_0} + 1)$. Izven tega intervala jih je le končno mnogo, tj. $n_0 - 1$ členov. Potem je zaporedje res na obe strani omejeno. Torej ima vsaj eno stekališče. Pokazati moramo še, da je stekališče eno samo in da je to stekališče limita.

Denimo, da ima $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dve stekališči a in b, $a \neq b$. Naj bo $|b - a| = l$.



Slika 2.2: Stekališči zaporedja

Ker je a stekališče, v okolici $(a - l/3, a + l/3)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja. Ker je b stekališče, tudi v okolici $(b - l/3, b + l/3)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja. Torej v obeh okolicah ležijo členi zaporedja s poljubno visokimi indeksi. Ker je zaporedje Cauchyjevo, obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da za poljubna $m, n \geq n_0$ velja, da je $|a_n - a_m| < l/3$. Vemo že, da lahko najdemo $m \geq n_0$, da bo $a_m \in (a - l/3, a + l/3)$ in $a_n \in (b - l/3, b + l/3)$. Tedaj velja

$$\begin{aligned}
|a_n - a_m| &= |(b - a) - (a_m - a) - (b - a_n)| \\
&\geq |b - a| - |a_m - a| - |b - a_n| \\
&\geq l - \frac{l}{3} - \frac{l}{3} \\
&= \frac{l}{3},
\end{aligned}$$

protislovje. Dokazali smo torej, da je stekališče eno samo. Označimo ga z a. Pokazati moramo samo še, da je to število a tudi limita zaporedja.

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhno. Pokažimo, da leži izven okolice $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ največ končno mnogo členov. Če bi bilo namreč zunaj te okolice neskončno mnogo členov, bi lahko našli podzaporedje $a_{n_1}, a_{n_2}, a_{n_3}, \ldots$, da bi bili vsi členi tega podzaporedja zunaj intervala $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, tj. $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$. Takšno podzaporedje pa je omejeno, saj izpolnjuje Cauchyjev pogoj. Zato ima vsaj eno stekališče, ki je seveda hkrati tudi stekališče prvotnega zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ker za vse člene a_{n_k} velja $|a_{n_k} - a| \geq \varepsilon$, sledi, da je $|c - a| \geq \varepsilon$, od koder sledi

$c \neq a$. To pomeni, da ima zaporedje še eno stekališče, c, ki pa je različno od a. Vemo pa, da takšnega stekališča ni. Protislovje pokaže, da je izven okolice $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ največ končno členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, kar pomeni, da so od nekega dovolj poznega člena naprej vsi v omenjenem intervalu. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, tako da za $n \geq n_0$ velja: $|a_n - a| < \varepsilon$, kar pomeni, da je a limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. □

Trditev 12 *Vsako omejeno zaporedje, ki ima eno samo stekališče, je konvergentno. To edino stekališče je limita zaporedja.*

Dokaz: Sledi iz dokaza prejšnjega izreka. □

Trditev 13 *Vsako konvergentno zaporedje je omejeno in ima natanko eno stekališče, ki je tudi limita zaporedja.*

Dokaz: Sledi iz dokaza prejšnjega izreka. □

Opomba: Če zaporedje ni omejeno in ima eno samo stekališče, ni konvergentno.

Zgled: Še enkrat si oglejmo zaporedje:

$$a_n = \begin{cases} n, & n \text{ je sodo} \\ 1/n, & n \text{ je liho,} \end{cases}$$

torej zaporedje

$$\frac{1}{1}, 2, \frac{1}{3}, 4, \frac{1}{5}, 6 \ldots$$

Stekališče je eno samo, tj. 0, zaporedje pa ni omejeno, torej ni konvergentno.

◊

2.5 Monotona zaporedja

Definicija 27 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je naraščajoče, če je $a_n \leq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in je padajoče, če je $a_n \geq a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je strogo naraščajoče, če je $a_n < a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$ in strogo podajoče zaporedje, če je $a_n > a_{n+1}$ za vsak $n \in \mathbb{N}$.*

Zgled:

1. Zaporedje $a_n = n$ je strogo naraščajoče.

2. Zaporedje $a_n = 1/n$ je strogo padajoče.

$\Diamond$

Izrek 8 *Naraščajoče zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. V tem primeru je njegova limita enaka natančni zgornji meji,*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \sup a_n = a.$$

Dokaz: Naj bo $a = \sup a_n$ in $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker $a - \varepsilon$ ni več zgornja meja zaporedja, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da velja $a - \varepsilon < a_{n_0}$. Ker je zaporedje naraščajoče in ker je a njegova zgornja meja, velja za $n \geq n_0$ naslednja neenakost

$$a - \varepsilon < a_n \leq a < a + \varepsilon.$$

Torej za $n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon$. Ker je bil ε poljubno majhen, sledi, da zaporedje konvergira k a. $\square$

Izrek 9 *Padajoče zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je konvergentno natanko tedaj, ko je navzdol omejeno.*

Dokaz: je analogen dokazu prejšnjega izreka. $\square$

Izrek 10 *Naj bo $[a_n, b_n]$ zaporedje vloženih zaprtih intervalov, tj.*

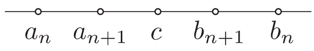
$$[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n] \qquad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Naj zaporedje njihovih dolžin konvergira k 0, tj.

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0.$$

Tedaj obstaja natanko eno število c, ki je vsebovano v vseh intervalih, tj.

$$c \in [a_n, b_n] \ \ \text{za vsak } n \text{ oziroma } \ \{c\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n].$$



Slika 2.3: Zaporedje vloženih intervalov

Dokaz: Iz $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$ sledi $a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n$. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je torej naraščajoče, medtem ko je zaporedje $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče. Velja tudi $a_n \leq b_n$, za vsak $n \in \mathbb{N}$. Torej je $\sup a_n \leq \inf b_n$. Ker je $\lim_{n\to\infty} |b_n - a_n| = 0$, sledi, da je $\sup a_n = \inf b_n$. Če označimo $c = \sup a_n = \inf b_n$, je torej $\{c\} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n]$. □

Zgled: Oglejmo si zaporedje vloženih intervalov $[a_n, b_n]$, pri čemer je $a_n = 1 - 2/n$ in $b_n = 1 + 1/n$. Prvi interval je $[-1, 2]$, drugi interval je $[0, 3/2]$ itn. Velja

$$\lim_{n\to\infty} \left| 1 + \frac{1}{n} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{3}{n} = 0$$

in $c = 1$. ♢

Spomnimo se, da podzaporedje zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ imenujemo vsako zaporedje oblike $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots$, kjer so $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ strogo naraščajoči indeksi.

Neposredno iz definicije konvergence sledi, da konvergentno zaporedje ostane konvergentno, če mu odvzamemo ali dodamo končno mnogo členov. Vsako podzaporedje konvergentnega zaporedja je konvergentno in ima isto limito kot prvotno zaporedje:

Trditev 14 *Naj bo* $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, *tedaj je* $\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = a$ *za vsako podzaporedje* $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je za vsak $n \geq n_0$ izpolnjena neenačba $|a_n - a| < \varepsilon$. Ker je a_{n_k} podzaporedje, obstaja $k_0 \in \mathbb{N}$, da je iz $n_{k_0} \geq n_0$ sledi $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ za vsak $k \geq k_0$. Pri tem je $n_k \geq n_{k_0} \geq n_0$. □

Izrek 11 *Naj bo* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *zaporedje. Število* $c \in \mathbb{R}$ *je stekališče zaporedja* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *natanko tedaj, ko obstaja podzaporedje, ki konvergira k* c.

Dokaz: ($\Leftarrow$) Naj obstaja podzaporedje $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$, ki konvergira k c. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja nek $k_0 \in \mathbb{N}$, da za vsak $k \geq k_0$ velja, da je $|a_{n_k} - c| < \varepsilon$. Torej v okolici $(c - \varepsilon, c + \varepsilon)$ leži neskončno mnogo členov zaporedja. Torej je c res stekališče.

($\Rightarrow$) Naj bo c stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Radi bi našli podzaporedje, ki konvergira k c. Naj bo $U_n = (c - 1/n, c + 1/n)$. U_1 je okolica točke c. V U_1 leži neskončno mnogo členov zaporedja, torej obstaja $a_{n_1} \in U_1$. U_2 je spet okolica točke c. V U_2 leži neskončno mnogo členov zaporedja, torej obstaja $a_{n_2} \in U_2$, $n_2 > n_1$. Induktivno sklepamo naprej,... Denimo, da že poznamo a_{n_1}, a_{n_2},..., a_{n_k}, za $a_{n_j} \in U_j$, za $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $n_1 < n_2 < \ldots < n_k$. V okolici U_{k+1} leži neskončno mnogo členov zaporedja (ker je c stekališče). Torej obstaja $a_{n_{k+1}} \in U_{k+1}$, $n_{k+1} > n_k$. Dobili smo podzaporedje $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. Pokažimo še, da je $\lim_{n\to\infty} a_{n_k} = c$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Potem obstaja takšen $k_0 \in \mathbb{N}$, da je $1/k_0 < \varepsilon$, iz česar naprej sledi $U_{k_0} \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Torej $(c - 1/k_0, c + 1/k_0) \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$. Naj bo $k \geq k_0$. $a_{n_k} \in U_k \subseteq U_{k_0} \subseteq (c - \varepsilon, c + \varepsilon)$, iz česar sledi $|a_{n_k} - c| < \varepsilon$.

Posledica 7 *Vsako omejeno zaporedje ima konvergentno podzaporedje.*

2.6 Računanje z zaporedji

Izrek 12 *Naj bosta* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *in* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentni zaporedji. Tedaj konvergirajo tudi zaporedja:*

$$i)\ a_1 + b_1,\ a_2 + b_2, \ldots$$

$$ii)\ a_1 - b_1,\ a_2 - b_2, \ldots$$

$$iii)\ a_1 \cdot b_1,\ a_2 \cdot b_2, \ldots$$

poleg tega velja še

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n - \lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n$$

Dokaz: *i*) Zaporedji $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ sta konvergentni. Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Želimo pokazati, da je $\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_1$ velja, da je $|a_n - a| < \varepsilon/2$. Prav tako obstaja $n_2 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_2$ velja, da je $|b_n - b| < \varepsilon/2$. Oglejmo si razliko

$$\begin{aligned} |a_n + b_n - (a+b)| &= |(a_n - a) + (b_n - b)| \\ &\leq |a_n - a| + |b_n - b|. \end{aligned}$$

Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$ in $n \geq n_0$. Tedaj je tudi $n \geq n_1$ in $n \geq n_2$, zato sledi

$$|a_n + b_n - (a+b)| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

ii) podobno kot v primeru *i*).

iii) Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Radi bi pokazali, da je $\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = a \cdot b$. Ocenimo

$$\begin{aligned} |a_n b_n - ab| &= |a_n b_n - a_n b + a_n b - ab| \\ &\leq |a_n||b_n - b| + |b||a_n - a| = (*) \end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno, je omejeno, torej obstaja $M < \infty$, da je $|a_n| \leq M$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Ker je $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ velja

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2\big(M + |b|\big)}, \qquad |b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2\big(M + |b|\big)}.$$

Torej je

$$\begin{aligned} (*) &\leq M|b_n - b| + |b|\ |a_n - a| \\ &\leq M\frac{\varepsilon}{2\big(M + |b|\big)} + |b|\frac{\varepsilon}{2\big(M + |b|\big)} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo n_0, da je $|a_n b_n - ab| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, kar pomeni, da je $\lim_{n\to\infty} a_n b_n = ab$. $\square$

Posledica 8 *Če zaporedje* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira in je* $\lambda \in \mathbb{R}$*, tedaj tudi zaporedje* $\{\lambda a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira in velja*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda a_n = \lambda \lim_{n\to\infty} a_n$$

Dokaz: Sledi iz *iii*) prejšnjega izreka, če vzamemo $b_n = \lambda$, $(n \in \mathbb{N})$. $\square$

Z indukcijo lahko prejšnja pravila posplošimo na poljubno končno število sumandov ali faktorjev.

Izrek 13 *Naj zaporedje* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira in naj bo* $a_n \neq 0$ *za vsak* $n \in \mathbb{N}$*. Naj za limito* $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ *tudi velja, da je* $a \neq 0$*. Tedaj konvergira zaporedje* $\{1/a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *in je*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} a_n} = \frac{1}{a}.$$

Dokaz: Ker zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k a, $a \neq 0$, od nekega n_0 naprej vsi členi a_n ležijo v intervalu $(a - |a|/2, a + |a|/2)$. Ta interval se ne seka z intervalom $(-|a|/2, |a|/2)$. Na intervalu $(-|a|/2, |a|/2)$ torej lahko leži največ končno mnogo členov a_n, ki so po naši predpostavki vsi različni od 0. To pa pomeni, da obstaja $\eta > 0$, da na intervalu $(-\eta, \eta)$ ni nobenega člena zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, torej $|a_n| \geq \eta$ za vse $n \in \mathbb{N}$.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k a, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|a_n - a| < |a|\eta\varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Če je torej $n \geq n_0$, sledi

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{a_n} - \frac{1}{a}\right| &= \frac{|a - a_n|}{|a|\ |a_n|} \\
&\leq \frac{|a_n - a|}{|a|\eta} \\
&< \frac{|a|\eta\varepsilon}{|a|\eta} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, to pomeni, da je $\lim_{n\to\infty} 1/a_n = 1/a$. $\square$

Posledica 9 *Če sta zaporedji* $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ *in* $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergentni, pri čemer so vsi* $b_n \neq 0$ *in* $\lim_{n\to\infty} b_n \neq 0$*, tedaj konvergira tudi zaporedje*

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots$$

in velja:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}.$$

Dokaz: Sledi iz prejšnjih izrekov:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \lim_{n\to\infty} \frac{1}{b_n} \\
&= \lim_{n\to\infty} a_n \frac{1}{\lim_{n\to\infty} b_n} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} a_n}{\lim_{n\to\infty} b_n}.
\end{aligned}$$

□

Zgled: Oglejmo si naslednjo limito.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3+n-2}{n^3+n^2+3} &= \lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}}{1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n^2}-\frac{2}{n^3}\right)}{\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{3}{n^3}\right)} \\
&= \frac{\lim_{n\to\infty} 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} - \lim_{n\to\infty}\frac{2}{n^3}}{\lim_{n\to\infty} 1 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} + \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^3}} \\
&= \frac{2+0-0}{1+0+0} \\
&= 2
\end{aligned}$$

◊

2.7 Zgornja in spodnja limita, limita $+\infty$, $-\infty$

Definicija 28 *Pravimo, da zaporedje konvergira k $+\infty$, če za vsak $A \in \mathbb{R}$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $a_n > A$ za vse $n \geq n_0$. V tem primeru pišemo:*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

Podobno definiramo konvergenco k $-\infty$.

Takšna zaporedja ne štejemo za konvergentna. Izraz: „konvergira k $+\infty$” oz. „konvergira k $-\infty$” razumemo kot eno samo besedo. Če velja $\lim_{n\to\infty} a_n =$

$+\infty$ je zaporedje navzdol omejeno, navzgor pa ni omejeno. Podobno velja za $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ na obe strani omejeno, torej omejeno. Vemo, da ima takšno zaporedje vsaj eno stekališče. Če je eno samo, že vemo, da je zaporedje konvergentno in to stekališče limita zaporedja. Lahko pa ima zaporedje več stekališč. Množica $\mathcal{E}$ stekališč je seveda omejena, ker je zaporedje omejeno. Obstajata torej $\sup\mathcal{E}$ in $\inf\mathcal{E}$.

Definicija 29 *Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje in naj bo $\mathcal{E}$ množica njegovih stekališč. Tedaj je $\mathcal{E}$ neprazna omejena množica.* $\sup\mathcal{E}$ *imenujemo zgornja limita oz. limes superior in pišemo*

$$\sup\mathcal{E} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n.$$

Podobno $\inf\mathcal{E}$ *imenujemo spodnja limita oz. limes inferior in pišemo*

$$\inf\mathcal{E} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\, a_n = \liminf_{n\to\infty} a_n.$$

Opomba: Iz definicij stekališča, natančne zgornje meje in natančne spodnje meje sledi, da sta $\limsup_{n\to\infty} a_n$ in $\liminf_{n\to\infty} a_n$ spet stekališči zaporedja. Torej sta to kar največje in najmanjše stekališče.

Definicija 30

1. *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzgor neomejeno. Tedaj pišemo*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

2. *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzdol neomejeno. Tedaj pišemo*

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

3. *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzgor neomejeno in navzdol omejeno. Tedaj pišemo:*

   i) če $\mathcal{E} \neq \emptyset$ definiramo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \inf\mathcal{E},$$

ii) če $\mathcal{E} = \emptyset$ definiramo

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = +\infty.$$

4. *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno in navzdol neomejeno. Tedaj pišemo:*

i) če $\mathcal{E} \neq \emptyset$ definiramo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{E},$$

ii) če $\mathcal{E} = \emptyset$ definiramo

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = -\infty.$$

Opomba: Naj omenimo, da oznak $+\infty$ in $-\infty$ ne obravnavamo kot števili.

Izrek 14 *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno. Tedaj je*

$$c = \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{E}$$

natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

(i) $a_n > c + \varepsilon$ velja za največ končno mnogo indeksov n.

(ii) $a_n > c - \varepsilon$ velja za neskončno mnogo indeksov n.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $\mathcal{E}$ množica stekališč zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $c = \limsup_{n\to\infty} a_n = \sup \mathcal{E}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Denimo, da je neenakost $a_n > c+\varepsilon$ izpolnjena za neskončno mnogo členov zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, torej za neko podzaporedje $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. To podzaporedje je omejeno, torej ima stekališče, ki je obenem tudi stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Označimo to stekališče z d. Ker je $a_{n_k} > c+\varepsilon$ za vsak k sledi, da je $d \geq c + \varepsilon$ in tako c ni supremum za $\mathcal{E}$. Prišli smo v protislovje. Torej $a_n > c + \varepsilon$ velja kvečjemu za končno mnogo členov. Ker pa je c stekališče, velja $a_n > c - \varepsilon$ za neskončno mnogo indeksov.

($\Leftarrow$) Naj število c zadošča pogojema (i) in (ii). Radi bi pokazali, da je $c = \sup \mathcal{E}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Pogoja (i) in (ii) povesta, da v intervalu $(c-\varepsilon, c+\varepsilon)$ leži neskončno členov zaporedja. Torej je c stekališče oz. $c \in \mathcal{E}$. Za vsako stekališče $x \in \mathcal{E}$ velja $x \leq c$. Če bi za nek $x \in \mathcal{E}$ veljalo $x > c$, bi v poljubno majhni okolici točke x ležalo neskončno mnogo členov zaporedja. Tedaj bi obstajal $\varepsilon > 0$, da bi bilo $a_n > c+\varepsilon$ za neskončno mnogo členov zaporedja. To pa bi bilo v protislovju z (i). Potem je $x \leq c$ za vsak $x \in \mathcal{E}$. Torej je c res natančna zgornja meja $\mathcal{E}$, tj. $c = \limsup_{n\to\infty} a_n$. □

Izrek 15 *Naj bo zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno. Tedaj je*

$$d = \liminf_{n\to\infty} a_n = \inf \mathcal{E}$$

natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ velja:

1) $a_n < d - \varepsilon$ izpolnjeno za kvečjemu končno mnogo indeksov n.

2) $a_n < d + \varepsilon$ izpolnjeno za neskončno mnogo indeksov n.

Dokaz: Podobno kot v prejšnjem primeru. □

Zgled: Dano je zaporedje $a_n = (-1)^n(n+1)/n$. Zapišimo nekaj členov zaporedja.

$$-\frac{2}{1}, \frac{3}{2}, -\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, -\frac{6}{5}, \ldots$$

Opazimo, da ima to zaporedje dve stekališči. To sta -1 in 1. Torej je

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 1 \quad \text{in} \quad \liminf_{n\to\infty} a_n = -1.$$

◊

Iz izrekov 14 in 15 sledi naslednji izrek.

Izrek 16 *Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno zaporedje. Tedaj je*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n = \inf_n \left(\sup_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\sup_{k\geq n} a_k\right),$$
$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \sup_n \left(\inf_{k\geq n} a_k\right) = \lim_{n\to\infty} \left(\inf_{k\geq n} a_k\right).$$

Posledica 10 *Naj bosta $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeni zaporedji in naj velja $a_n \leq b_n$ za vsak n. Tedaj je*

$$\limsup_{n\to\infty} a_n \leq \limsup_{n\to\infty} b_n,$$

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

2.8 Definicija potence pri realnem eksponentu

Če je $a > 0$ in $r = \frac{m}{n}$ pozitivno racionalno število, tedaj z a^r označimo potenco

$$a^r = a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

V tem poglavju si bomo ogledali, kako definiramo a^r za poljubno realno število $r > 0$.

Opomba: V oznaki a^r imenujemo a ***osnova***, r ***eksponent*** in število a^r ***potenca***.

Trditev 15 *Naj bo* $0 < a < 1$. *Tedaj je*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = 0.$$

Dokaz: Naj bo $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje. Ker je $0 < a < 1$, je $a^{n+1} = aa^n < a^n$, torej je zaporedje $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ padajoče. Vsako število a^n je večje od 0. Zaporedje je torej padajoče in navzdol omejeno. Tedaj vemo, da je konvergentno, da torej obstaja $\lim_{n\to\infty} a^n = c$. Oglejmo si še $\lim_{n\to\infty} a^{n+1}$,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^{n+1} &= \lim_{n\to\infty} aa^n \\ &= a \lim_{n\to\infty} a^n \\ &= ac\end{aligned}$$

Sledi $c = ac$ oz. $c(1-a) = 0$, torej je $c = 0$. □

Trditev 16 *Naj bo* $a > 1$. *Tedaj je*

$$\lim_{n\to\infty} a^n = +\infty.$$

Dokaz: Ker je $a > 1$, je $a^{n+1} = aa^n > a^n$, torej je zaporedje $\{a^n\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče. Vsako število a^n je večje od 1. Trditev bo dokazana, če pokažemo, da to zaporedje ni navzgor omejeno. Denimo, da zaporedje je navzgor omejeno.

Tedaj vemo, da bi obstajala $\lim_{n\to\infty} a^n = c$ in bi bilo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} a^{n+1} &= \lim_{n\to\infty} aa^n \\ &= a \lim_{n\to\infty} a^n \\ &= ac\end{aligned}$$

Sledi $c = ac$ oz. $c(1-a) = 0$, torej $c = 0$, kar pa je v protislovju s tem, da so vsi členi zaporedja večji od 1. Zaporedje je torej res navzgor neomejeno. $\square$

Izrek 17 *Za vsak $a > 0$ in vsak $m \in \mathbb{N}$ obstaja natanko en $x > 0$, da je $x^m = a$. Pisali bomo $x = \sqrt[m]{a}$.*

Dokaz: Naj bo $a > 0$ in $m \in \mathbb{N}$. Če takšen x obstaja, je nujno en sam. Iz $x_1 > x_2$ namreč sledi $a = x_1^m > x_2^m = a$, protislovje. Da takšen x obstaja, pa vidimo takole:

Naj bo x_0 največje nenegativno celo število, da je $x_0^m \le a$. Tedaj je $x_0^m \le a < (x_0+1)^m$. Če slučajno $x_0^m = a$, postavimo $x = x_0$ in smo končali. Če je $x_0^m < a$, pa naj bo x_1 največje med števili

$$x_0, x_0 + 1/10, \ldots, x_0 + 9/10,$$

za katero velja $x_1^m \le a$. Tedaj je

$$x_1^m \le a < (x_1 + 1/10)^m .$$

Če je $x_1^m = a$, postavimo $x = x_1$ in smo končali. Če pa ni, proces nadaljujemo. Tedaj ali pridemo do našega x po končno korakih ali pa proces lahko nadaljujemo brez konca. V drugem primeru dobimo zaporedje x_n, da je

$$x_n^m \le a < \left(x_n + \frac{1}{10^n}\right)^m \quad \text{za vse } \ n \in \mathbb{N}.$$

Zaporedje $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ je naraščajoče, zaporedje $x_n + 1/10^n$ pa padajoče. Prvo je navzgor omejeno, drugo pa navzdol omejeno, torej sta obe konvergentni. Ker je

$$\lim_{n\to\infty} \big((x_n + 1/10^n) - x_n\big) = \lim_{n\to\infty} 1/10^n = 0,$$

sledi, da imata isto limito, ki jo označimo z x. Iz $x_n^m \le a$, za vse $n \in \mathbb{N}$ sledi $x^m = \lim_{n\to\infty} x_n^m \le a$. Podobno iz $(x_n + 1/10^n)^m > a$, za vse n sledi

$x^m = \lim_{n\to\infty}(x_n + 1/10^n)^m \geq a$. Torej je $x^m = a$. $\square$

Opomba: Ker je za vsak $a > 0$ in za vsak $m \in \mathbb{N}$ m-ti koren $\sqrt[m]{a}$ enolično določen, vidimo, da

- iz $0 < a < b$ sledi $\sqrt[m]{a} < \sqrt[m]{b}$
- iz $0 < a \leq b$ sledi $\sqrt[m]{a} \leq \sqrt[m]{b}$
- in za poljubne $a > 0$, $b > 0$, $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ velja

$$\begin{aligned}
\sqrt[m]{ab} &= \sqrt[m]{a}\,\sqrt[m]{b} \\
\sqrt[n]{a^m} &= (\sqrt[n]{a})^m \\
\sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} &= \sqrt[nm]{a} \\
\sqrt[np]{a^{nq}} &= \sqrt[p]{a^q} \\
\sqrt[p]{a^q}\,\sqrt[n]{a^m} &= \sqrt[pn]{a^{qn}}\,\sqrt[pn]{a^{pm}} \\
&= \sqrt[pn]{a^{qn+pm}}
\end{aligned}$$

Definicija 31 *Naj bosta $p, q \in \mathbb{N}$. Pisali bomo*

$$a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Torej, če je $r \in \mathbb{Q}$, $r > 0$, $r = p/q$, $p, q \in \mathbb{N}$, je

$$a^r = a^{p/q} = \sqrt[q]{a^p}.$$

Naprej definiramo

$$a^0 = 1, \quad a \neq 0$$

in za $r < 0$

$$a^r = \frac{1}{a^{-r}}, \quad a \neq 0.$$

Opomba: Iz zgornjih lastnosti računanja s koreni sledi, da je za racionalno število r potenca a^r odvisna le od r, nič pa od tega, kako r zapišemo kot ulomek. Če je r naravno število, je seveda a^r običajna potenca.

Trditev 17 *Vse lastnosti računanja s potencami, ko so eksponenti cela števila, veljajo tudi, ko so eksponenti racionalna števila.*

$$a^r a^q = a^{r+q}$$

$$(a^r)^q = a^{rq}$$

$$a^r b^r = (ab)^r$$

Izrek 18 *Za vsak* $a > 0$ *je*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1.$$

Dokaz:

i) Če je $a > 1$, potem je $a^n < a^{n+1}$ in zato

$$\sqrt[n(n+1)]{a^n} < \sqrt[n(n+1)]{a^{n+1}}, \quad \text{torej je} \quad \sqrt[n+1]{a} < \sqrt[n]{a}.$$

Zaporedje $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ je torej padajoče in navzdol omejeno (vsi členi so večji od 1). Torej obstaja limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = c \geq 1$. Denimo, da je $c > 1$. Tedaj je $\sqrt[n]{a} \geq c$ za vsak n oz. $a \geq c^n$ za vsak n. Če je $c > 1$, vemo, da gre c^n čez vse meje pri $n \to \infty$, protislovje. Torej je $c = 1$.

ii) Če je $a = 1$, ni kaj dokazovati.

iii) Če je $0 < a < 1$, potem je $a^n > a^{n+1}$ in zato podobno kot prej

$$\sqrt[n+1]{a} > \sqrt[n]{a}$$

Zaporedje $\{\sqrt[n]{a}\}_{n=1}^{\infty}$ je torej naraščajoče in navzgor omejeno ($\sqrt[n]{a} < 1$ za vsak n). Torej obstaja limita $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = c \leq 1$. Denimo, da je $c < 1$. Tedaj je $\sqrt[n]{a} \leq c$ za vsak n oz. $a \leq c^n$ za vsak n. Če je $0 < c < 1$, pa vemo, da je $\lim_{n\to\infty} c^n = 0$, protislovje, saj je $a > 0$. Torej je spet $c = 1$.

□

Posledica 11 *Naj bo* $a > 0$. *Za vsak (še tako majhen)* $\varepsilon > 0$ *obstaja takšen* $\delta > 0$, *da je*

$$|a^h - 1| < \varepsilon,$$

za vsak $h \in \mathbb{Q}$, *za katerega velja, da je* $|h| < \delta$, *tj.* $h \in (-\delta, \delta)$.

Dokaz: Naj bo $a > 0$ in $\varepsilon > 0$. Ker je $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a} = 1$, obstaja $n_1 \in \mathbb{N}$, da je $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, čim je $n \geq n_1$. Ker je tudi $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/a} = 1$, obstaja $n_2 \in \mathbb{N}$, da je $|\sqrt[n]{1/a} - 1| < \varepsilon$, čim je $n \geq n_2$. Naj bo $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Če je $n \geq n_0$, torej velja $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$ in $|\sqrt[n]{1/a} - 1| < \varepsilon$.

Fiksirajmo $n \geq n_0$ in postavimo $\delta = 1/n$. Naj bo $h \in \mathbb{Q}$ in $h \in (-\delta, \delta)$.

i) Naj bo najprej $h > 0$. V primeru, ko je $a > 1$, je $1 < a^h < a^{1/n}$, saj je $h < \delta$. Sledi: $0 < a^h - 1 < a^{1/n} - 1$ oz. $0 < |a^h - 1| < |a^{1/n} - 1|$. Ker je $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, je torej tudi $|a^h - 1| < \varepsilon$. Za $a < 1$, oz. $0 < a < 1$, pa velja ocena $1 > a^h > a^{1/n}$ oz. $0 < 1 - a^h < 1 - a^{1/n}$. Sledi: $0 < |1 - a^h| < |1 - a^{1/n}|$, kar pa je enako kot $0 < |a^h - 1| < |a^{1/n} - 1|$. Ker je $|\sqrt[n]{1/a} - 1| < \varepsilon$, je ponovno $|a^h - 1| < \varepsilon$.

ii) Če je $h = 0$, ni kaj dokazovati.

iii) Če je $h < 0$, dokazujemo podobno kot v primeru *i)*.

□

Izrek 19 *Naj bo $a > 0$ in naj zaporedje racionalnih števil $r_1, r_2, \ldots$ konvergira k limiti r. Tedaj konvergira tudi zaporedje $a^{r_1}, a^{r_2}, \ldots$ Če je r racionalno število, tedaj je*

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = a^r.$$

Dokaz: Vemo že, da zaporedje konvergira natanko tedaj, ko izpolnjuje Cauchyjev pogoj.

i) Naj bo $a > 1$. Konvergentno zaporedje $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ je omejeno, torej obstaja racionalno število $M < \infty$, da je $r_n \leq M$, za vse $N \in \mathbb{N}$, od koder sledi, da je $a^{r_n} \leq a^M$, za vse $n \in \mathbb{N}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po prejšnji posledici obstaja takšen $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$, $h \in \mathbb{Q}$ velja:

$$|a^h - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}.$$

Ker je zaporedje $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno, je Cauchyjevo, torej obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|r_n - r_m| < \delta$ za vsaka $n, m \geq n_0$. Torej je

$$|a^{r_n - r_m} - 1| < \frac{\varepsilon}{a^M}, \quad \text{za vsaka } n, m \geq n_0.$$

Če je torej $n, m \geq n_0$, je

$$\begin{aligned}|a^{r_n} - a^{r_m}| &= |a^{r_m}(a^{r_n - r_m} - 1)| \\ &\leq a^M |a^{r_n - r_m} - 1| \\ &< a^M \frac{\varepsilon}{a^M} \\ &= \varepsilon\end{aligned}$$

Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, smo tako pokazali, da zaporedje $\{a^{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ izpolnjuje Cauchyjev pogoj, zato je konvergentno. Prvi del izreka smo tako dokazali za primer, ko je $a > 1$.

Naj bo $r = \lim_{n\to\infty} r_n$ racionalno število. Tedaj ima a^r smisel in je

$$|a^{r_n} - a^r| = |a|^r |a^{r_n - r} - 1|.$$

Kot prej, izraz $|a^{r_n - r} - 1|$ postane poljubno majhen, če je le $|r_n - r|$ dovolj majhen. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|a^{r_n} - a^r| < \varepsilon$, čim je $n \geq n_0$, kar dokaže drugi del izreka v primeru, ko je $a > 1$.

ii) Za $a \leq 1$ je dokaz podoben.

□

Opomba: Če $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira, za vsak $a > 0$ velja $\lim_{n\to\infty} a^{r_n} > 0$. To sledi iz dejstva, da je zaporedje $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ omejeno, $-M < r_n < M$, za nek $M \in \mathbb{Q}$, $M < \infty$, od koder pri $a > 1$ sledi

$$a^{-M} < a^{r_n} < a^M, \quad \text{za vse} \quad n$$

in pri $a < 1$

$$a^M < a^{r_n} < a^{-M}, \quad \text{za vse} \quad n.$$

Trditev 18 *Naj bo $a > 0$ in naj imata zaporedji $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ racionalnih števil isto limito*

$$\lim_{n\to\infty} r_n = \lim_{n\to\infty} s_n,$$

tedaj je

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

Dokaz: Vemo, da obstaja $M \in \mathbb{Q}$, $1 < M < \infty$, da je $-M \leq r_n \leq M$ in $-M \leq s_n \leq M$ za vsak n, saj imata zaporedji limito in sta zato omejeni. Torej za $a > 1$ velja

$$0 < a^{-M} \leq a^{r_n} \leq a^M \quad \text{in} \quad 0 < a^{-M} \leq a^{s_n} \leq a^M.$$

$$\begin{aligned} 1 &= \lim_{n\to\infty} a^0 \\ &= \lim_{n\to\infty} a^{\lim_{n\to\infty} r_n - \lim_{n\to\infty} s_n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{a^{\lim_{n\to\infty} r_n}}{a^{\lim_{n\to\infty} s_n}} \\ &= \frac{\lim_{n\to\infty} a^{\lim_{n\to\infty} r_n}}{\lim_{n\to\infty} a^{\lim_{n\to\infty} s_n}} \end{aligned}$$

in od tod

$$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} = \lim_{n\to\infty} a^{s_n}.$$

Podobno sklepamo v primeru, ko je $0 < a < 1$. □

Definicija 32 *Naj bo $a > 0$ in $r \in \mathbb{R}$. Naj zaporedje $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ realnih števil konvergira k številu r. Definiramo potenco a^r kot*

$$a^r = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}.$$

Na ta način je potenca a^r dobro definirana, saj iz zgornjega sledi, da $\lim_{n\to\infty} a^{r_n}$ ni odvisna od zaporedja $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$, temveč le od njegove limite r.

Opomba:

1. če je $r > 0$ in $0 < a < b$, je $a^r < b^r$

2. če je $a > 1$ in $0 < r_1 < r_2$, je $a^{r_1} < a^{r_2}$

S pomočjo računskih pravil za limite je mogoče videti, da vsa računska pravila, ki veljajo za potence z racionalnimi eksponenti, veljajo tudi za potence z realnimi eksponenti.

2.9 Nekaj posebnih zaporedij

1. Če je $|x| < 1$, je

$$\lim_{n\to\infty} x^n = 0.$$

Dokaz: Vemo, da je $-|x|^n \leq x^n \leq |x|^n$. Poleg tega je $\lim_{n\to\infty} |x|^n = 0$. Torej $\lim_{n\to\infty} x^n = 0$. $\square$

2. Če je $x > 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1.$$

To smo že dokazali. $\square$

3. Če je $a > 0$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^a} = 0.$$

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{1}{n^a} - 0\right| < \varepsilon \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{\varepsilon} < n^a \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} < n$$

Če je $n_0 > (1/\varepsilon)^{1/a}$, tedaj za vsak $n \geq n_0$ velja:

$$\left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{\frac{1}{a}} < n_0 \leq n \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{1}{n^a}\right| < \varepsilon.$$

$\square$

4.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

Dokaz: Naj bo $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$. Tedaj je $x_n \geq 0$ za vse n in $x_n + 1 = \sqrt[n]{n}$ oz. $(1 + x_n)^n = n$. Po binomski formuli sledi

$$1 + nx_n + \frac{n(n-1)}{2}x_n^2 + \ldots + x_n^n = (1 + x_n)^n = n,$$

od koder dobimo

$$\frac{n(n-1)}{2}x_n^2 \leq n \quad \Rightarrow \quad x_n^2 \leq \frac{2}{n-1} \quad \Rightarrow \quad 0 \leq x_n \leq \sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

Torej $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$. $\square$

5. Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ in $q > 1$, $q \in \mathbb{R}$. Tedaj je:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0.$$

Dokaz: Naj bo $a_n = n^\alpha / q^n$.

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{(n+1)^\alpha}{q^{n+1}} \\ &= \left(\frac{n+1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q}\frac{n^\alpha}{q^n} \\ &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} a_n \end{aligned}$$

Vemo že, da je $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha = 1$. Ker je $q > 1$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja

$$\frac{1}{q}\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha < 1.$$

Za $n \geq n_0$ torej velja $0 < a_{n+1} < a_n$. Zaporedje a_n je torej padajoče za $n \geq n_0$ in navzdol omejeno. Torej ima limito, $c = \lim_{n\to\infty} a_n$. Iz

$$a_{n+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} a_n$$

sledi

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} a_{n+1} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q} a_n\right] \\ &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha \frac{1}{q}\right] \lim_{n\to\infty} a_n \end{aligned}$$

oziroma $c = 1 \cdot 1/q \cdot c$. Ker je $q > 1$, sledi $c = 0$. □

6. **Izrek 20** *Zaporedje*

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

je konvergentno.

Opomba: Limito $\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ označimo z e, torej

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

Dokaz: Zapišimo nekaj členov zaporedja: $a_1 = 2$, $a_2 = 9/4$, $a_3 = 64/27, \ldots$ Pokazali bomo, da je zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^\infty$ naraščajoče in navzgor omejeno. Splošni člen zaporedja je

$$\begin{aligned} a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\ &= 1 + n\frac{1}{n} + \binom{n}{2}\frac{1}{n^2} + \ldots + \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} + \ldots + \binom{n}{n}\frac{1}{n^n} \end{aligned}$$

Pri tem je

$$\begin{aligned} \binom{n}{k}\frac{1}{n^k} &= \frac{n!}{k!(n-k)!}\frac{1}{n^k} \\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{k-1}{n}\right)\frac{1}{k!}. \end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned} a_n = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \\ + \left(1-\frac{1}{n}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n-1}{n}\right)\frac{1}{n!} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_{n+1} = 1 + 1 + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\frac{1}{2!} + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\frac{1}{3!} + \ldots + \\ + \left(1-\frac{1}{n+1}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1-\frac{n}{n+1}\right)\frac{1}{(n+1)!} \end{aligned}$$

S primerjavo enakoležnih sumandov v vsotah opazimo, da je $a_{n+1} > a_n$, torej je zaporedje naraščajoče. Dokažimo, da je zaporedje navzgor omejeno. Ker za vsak n velja

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots + \frac{1}{n!},$$

sledi, da za vsak n velja

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \ldots + \frac{1}{2^{n-1}} = 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3$$

$$a_n < 1 + \frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} < 3.$$

Torej je $a_n < 3$ za vsak $n \in \mathbb{N}$. Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je torej naraščajoče in navzgor omejeno, torej je konvergentno.

$\square$

Opomba:

$$\begin{aligned}
\lim_{m\to-\infty}\left(1+\frac{1}{m}\right)^m &= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{-n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{-n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\frac{1}{n-1}\right)\right] \\
&= e\cdot 1 \\
&= e
\end{aligned}$$

2.10 Zaporedja kompleksnih števil

Zaporedje kompleksnih števil $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ je preslikava z $\mathbb{N}$ v $\mathbb{C}$.

$$\mathbb{N}\to\mathbb{C}$$

$$n\mapsto z_n$$

Definicija 33 ***ε-okolica*** *števila $z\in\mathbb{C}$ je* ***odprt krog*** *s središčem v z in polmerom ε.*

$$\mathcal{K}(z,\varepsilon)=\{w\in\mathbb{C}:|w-z|<\varepsilon\}$$

Definicija 34 *Zaporedje $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}\subseteq\mathbb{C}$ kompleksnih števil konvergira k številu $z\in\mathbb{C}$, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon>0$ obstaja takšen $n_0\in\mathbb{N}$, da za vsak $n\geq n_0$ velja, da je*

$$|z_n-z|<\varepsilon.$$

Zgled: Dano je zaporedje

$$z_n=\frac{1}{n}+i\frac{n-1}{n}$$

Zapišimo nekaj členov: $z_1=1$, $z_2=1/2+i/2$, $z_3=1/3+2i/3$, $z_4=1/4+3i/4,\ldots$

$$\lim_{n\to\infty}z_n=i$$

$\Diamond$

Izrek 21 *Zaporedje $z_n = a_n + ib_n$, $a_n, b_n \in \mathbb{R}$ konvergira k $z = a + bi$, $a, b \in \mathbb{R}$ natanko tedaj, ko je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \textit{in} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $\varepsilon > 0$ in $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja $|z_n - z| < \varepsilon$. Tedaj za vse $n \geq n_0$ velja

$$\sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} < \varepsilon$$

oziroma

$$\sqrt{(a_n - a)^2} < \varepsilon \quad \text{in} \quad \sqrt{(b_n - b)^2} < \varepsilon,$$

Torej $|a_n - a| < \varepsilon$, $|b_n - b| < \varepsilon$. Torej je res

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{in} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = b.$$

($\Leftarrow$) Naj bo $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ in $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja $|a_n - a| < \varepsilon/\sqrt{2}$ in $|b_n - b| < \varepsilon/\sqrt{2}$. Tedaj je

$$\begin{aligned} |z_n - z| &= \sqrt{(a_n - a)^2 + (b_n - b)^2} \\ &< \sqrt{(\varepsilon/\sqrt{2})^2 + (\varepsilon/\sqrt{2})^2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

$\square$

Od tod sledijo naslednja pravila:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} (z_n + w_n) &= \lim_{n\to\infty} z_n + \lim_{n\to\infty} w_n \\ \lim_{n\to\infty} (z_n - w_n) &= \lim_{n\to\infty} z_n - \lim_{n\to\infty} w_n \\ \lim_{n\to\infty} (z_n \cdot w_n) &= \lim_{n\to\infty} z_n \cdot \lim_{n\to\infty} w_n \\ \lim_{n\to\infty} \left(\frac{z_n}{w_n}\right) &= \frac{\lim_{n\to\infty} z_n}{\lim_{n\to\infty} w_n}, \quad w_n \neq 0, \lim_{n\to\infty} w_n \neq 0 \end{aligned}$$

Izrek 22 *Zaporedje z_n je konvergento natanko tedaj, ko zadošča Cauchyjevemu pogoju, tj. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|z_n - z_m| < \varepsilon$ za poljubna $n, m \geq n_0$.*

2.11 Pojem (neskončne) vrste

Definicija 35 *Formalno vsoto oblike $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$, kjer so $a_j \in \mathbb{R}$, imenujemo* ***vrsta*** *(neskončna vrsta).*

Definicija 36 *Naj bo $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ vrsta. Zaporedje*

$$S_1 = a_1,\ S_2 = a_1 + a_2,\ \ldots, S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$$

imenujemo ***zaporedje delnih vsot****.*

Definicija 37 *Če zaporedje S_n delnih vsot vrste $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergira, pravimo, da vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$* ***konvergira****. Limito S zaporedja S_n v tem primeru imenujemo* ***vsota vrste*** *in pišemo*

$$S = a_1 + a_2 + \ldots$$

Če S_n divergira, pravimo, da vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ divergira.

Enakost $a_1 + a_2 + \ldots = S$ pomeni dvoje: 1. da vrsta konvergira, 2. da je njena vsota enaka S. Običajno poenostavimo zapis vrste in pišemo

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

Izrek 23 (Cauchyjev pogoj) *Vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergira natanko tedaj, ko za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $n_0 \in \mathbb{N}$, da za vse $n \geq n_0$ in $p \in \mathbb{N}$ velja:*

$$|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| < \varepsilon.$$

Posledica 12 *Če vrsta konvergira, je*

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Obratno v splošnem ne velja.

Definicija 38 *Naj bo $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentna vrsta. Tedaj seveda za vsak $n \in \mathbb{N}$ konvergira tudi vrsta $a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots$, ki jo imenujemo* ***$n$-ti ostanek vrste*** *$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$. Če je*

$$a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + \ldots = R_n$$

in

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n = S_n,$$

potem je

$$S_n + R_n = S.$$

Vrstam se bomo pozneje podrobno posvetili.

Poglavje 3

Funkcije realne spremenljivke

3.1 Definicija funkcije, graf funkcije

Funkcije so posebni primeri preslikav. To so preslikave s podmnožic realnih števil v realna števila.

Definicija 39 *Naj bo $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$.* ***Realna funkcija*** *na $\mathcal{D}$ je preslikava*

$$f: \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$

$$f: x \mapsto f(x),$$

ki vsakemu elementu x iz $\mathcal{D}$ priredi natanko določeno realno število $f(x)$. $\mathcal{D}$ je ***domena*** *ali* ***definicijsko območje*** *funkcije f, x pa imenujemo* ***neodvisna spremenljivka****. Množico vseh števil oblike $f(x)$, ko x preteče $\mathcal{D}$, imenujemo* ***zaloga vrednosti*** *funkcije f in jo označimo z $\mathcal{R}_f$.*

Funkcija je določena, če sta znani njeno definicijsko območje in funkcijski predpis. Dve funkciji f, g sta torej enaki, če velja:

$$\mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g$$

in

$$f(x) = g(x) \quad \text{za vsak} \quad x \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_g.$$

Zgled: Naj bo

$$f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$$

funkcija, dana s predpisom

$$f(x) = x$$

in funkcija

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R},$$

dana s predpisom

$$g(x) = |x|.$$

Funkciji f in g nista enaki, saj

$$\mathcal{D}_f = [0, \infty) \neq \mathcal{D}_g = \mathbb{R}, \quad \text{torej} \quad f \neq g.$$

Ker pa je $\mathcal{D}_f \subseteq \mathcal{D}_g$ in $f(x) = g(x)$ za $x \in \mathcal{D}_f$ pravimo, da je g ***razširitev funkcije*** f na $\mathcal{D}_g$ oz. f ***zožitev*** funkcije g na $\mathcal{D}_f$. $\Diamond$

Dogovor je, da pri funkcijah, kjer je predpis (oz. formula) $f(x)$ podan eksplicitno, definicijsko območje pa eksplicitno ni podano, privzamemo, da je definicijsko območje največja množica vseh tistih $x \in \mathbb{R}$, za katere ima izraz $f(x)$ smisel. Število $f(x)$ imenujemo tudi ***vrednost funkcije*** f ***v točki*** x.

Zgled: Določi definicijska območja za funkcije, podane z naslednjimi formulami.

1. $f(x) = \sqrt{x}, \qquad \mathcal{D} = [0, \infty)$
2. $f(x) = \log(x - 1) + \log(x + 1), \qquad \mathcal{D} = (1, \infty)$
3. $f(x) = \log(x^2 - 1), \qquad \mathcal{D} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

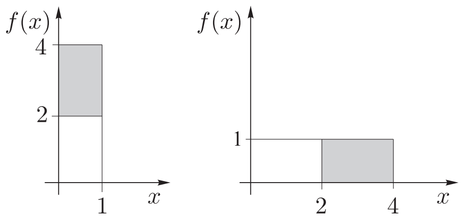
$\Diamond$

Definicija 40 *Naj bosta $\mathcal{A}$ in $\mathcal{B}$ množici. Kartezični produkt $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ je množica vseh urejnih parov (a, b), $a \in \mathcal{A}$, $b \in \mathcal{B}$.*

Opomba: Kartezični produkt dveh množic realnih števil lahko predstavimo kot množico točk v ravnini. Cela ravnina je enaka $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

Zgled: Naj bosta $\mathcal{A} = [0, 1]$ in $\mathcal{B} = [2, 4]$ množici. Oglejmo si $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ in $\mathcal{B} \times \mathcal{A}$, slika 3.1.

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B}, \mathcal{B} \times \mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$



Slika 3.1: V splošnem $\mathcal{A} \times \mathcal{B} \neq \mathcal{B} \times \mathcal{A}$

$$\begin{aligned}\mathcal{A} \times \mathcal{B} =& [0, 1] \times [2, 4] \\ =& \{(x, y) : x \in [0, 1], y \in [2, 4]\}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{B} \times \mathcal{A} =& [2, 4] \times [0, 1] \\ =& \{(x, y) : x \in [2, 4], y \in [0, 1]\}\end{aligned}$$

$\Diamond$

Definicija 41 ***Graf funkcije*** *$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je množica vseh točk v ravnini oblike:*

$$\big(x, f(x)\big), \quad x \in \mathcal{D},$$

torej

$$\Gamma_f = \big\{\big(x, f(x)\big) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} : x \in \mathcal{D}\big\}.$$

Opomba: Če je $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ in $\Gamma_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, tedaj vsaka navpična premica $x = c$ seka graf Γ_f kvečjemu enkrat. Torej množica $\mathcal{A} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, za katero obstaja navpična premica $x = c_0$, ki seka $\mathcal{A}$ v več kot eni točki, ni graf nobene realne funkcije.

Velja tudi: če ima neprazna množica $\mathcal{G} \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ lastnost, da jo vsaka navpična premica seka kvečjemu enkrat, potem je $\mathcal{G}$ graf neke funkcije. Funkcija je s svojim grafom natanko podana.

Tako kot je s funkcijo njen graf Γ_f natanko določen, tudi graf Γ_f enolično določa funkcijo, tako njeno definicijsko območje, kot tudi predpis. Naj bo $\mathcal{A}$ takšna množica v ravnini, ki jo navpična premica seka kvečjemu v eni točki. Naj bo $\mathcal{D}$ množica vseh takšnih x, za katere navpična premica skozi točko $(x, 0)$ seka množico $\mathcal{A}$. Množica $\mathcal{D}$ je definicijsko območje naše funkcije f, katere graf Γ_f sovpada z $\mathcal{A}$. Funkcijski predpis pa dobimo takole: naj bo $x \in \mathcal{D}$. Tedaj navpična premica skozi točko $(x, 0)$ seka $\mathcal{A}$ natanko v eni točki (x, y). Ta y bo enak $f(x)$.

3.2 Osnovne operacije s funkcijami

Funkcije so posebni primeri preslikav. Zanje so torej definirani vsi pojmi, ki so definirani za preslikave v poglavju 2.1.

3.2.1 Kompozitum funkcij, inverzna funkcija

Naj bosta $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$ funkciji, za kateri velja $\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{D}_g$. Kompozitum funkcij f in g je funkcija:

$$g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$$

definirana s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g\big(f(x)\big).$$

Zgled: Oglejmo si kompozicijo funkcij f in g, ki sta podani z naslednjima formulama:

$$f(x) = x^2 + 1, \quad \mathcal{D}_f = \mathbb{R},$$
$$g(x) = \log x^2, \quad \mathcal{D}_g = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Opazimo, da je $\mathcal{R}_f = [1, \infty)$, $\mathcal{R}_g = \mathbb{R}$. Možni kompoziciji sta:

$$(g \circ f)(x) = \log(x^2 + 1)^2, \quad \mathcal{D}_{g \circ f} = \mathbb{R}$$
$$(f \circ g)(x) = \big(\log x^2\big)^2 + 1, \quad \mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

$\Diamond$

Opomba: Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija. Tedaj je f bijektivna preslikava z $\mathcal{D}_f$ na $\mathcal{R}_f$. Inverzu te preslikave pravimo ***inverzna funkcija*** funkcije f in ga označimo z f^{-1}. Torej je $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathcal{R}_f$, $\mathcal{R}_{f^{-1}} = \mathcal{D}_f$ in $f^{-1}(y) = x$ pomeni isto kot $f(x) = y$. Torej je

$$f^{-1}\big(f(x)\big) = x \quad \text{za vse } x \in \mathcal{D}_f$$

in

$$f\big(f^{-1}(y)\big) = y \quad \text{za vse } y \in \mathcal{R}_f.$$

Zgled: Naj bo

$$f(x) = \frac{2x + 3}{3x - 1}.$$

Določimo f^{-1}. Definicijsko območje $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{1/3\}$. Če je $x \in \mathcal{D}_f$ in

$$y = \frac{2x + 3}{3x - 1},$$

je

$$x = \frac{y + 3}{3y - 2}$$

enolično določen, torej je f injektivna. Vidimo tudi, da je $\mathcal{R}_f = \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$. Torej je $\mathcal{D}_{f^{-1}} = \mathbb{R} \setminus \{2/3\}$ in

$$f^{-1}(x) = \frac{x + 3}{3x - 2}.$$

$\Diamond$

Če je $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija, je njen graf

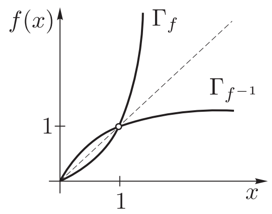
$$\begin{aligned} \Gamma_f &= \big\{\big(x, f(x)\big) : \ x \in \mathcal{D}_f\big\} \\ &= \big\{\big(f^{-1}(y), y\big) : \ y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\big\}. \end{aligned}$$

Slednje pa je prezrcaljena slika (glede na zrcaljenje preko simetrale prvega in tretjega kvadranta) množice

$$\{(y, f^{-1}(y)) : \ y \in \mathcal{D}_{f^{-1}}\},$$

ki je enaka grafu $\Gamma_{f^{-1}}$. Torej je $\Gamma_{f^{-1}}$ zrcalna slika Γ_f glede na simetralo prvega in tretjega kvadranta.

Zgled: Na $\mathcal{D}_f = [0, \infty)$ je dana funkcija f s predpisom $f(x) = x^2$. Tedaj je $\mathcal{R}_f = [0, \infty)$ in funkcijski predpis za inverzno funkcijo $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $\mathcal{D}_{f^{-1}} = [0, \infty)$.



Slika 3.2: Grafa funkcij f in f^{-1}

$\Diamond$

3.2.2 Nadaljnje operacije s funkcijami

Nadaljnje pojme za funkcije lahko definiramo, ker funkcije slikajo v realna števila.

Definicija 42

1. *Funkcija f je navzgor omejena, če obstaja takšno število $M \in \mathbb{R}$, da je $f(x) \leq M$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.*

2. *Naj bo f navzgor omejena.* ***Supremum funkcije*** *f definiramo kot supremum njene zaloge vrednosti.*

$$\sup f = \sup \mathcal{R}_f = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{D}_f\}$$

3. *Podobno definiramo tudi navzdol omejeno funkcijo in* ***infimum funkcije****.*

*4. Če je funkcija navzgor in navzdol omejena, pravimo, da je **omejena**.*

Zgled: Oglejmo si funkcijo f, ki je dana s predpisom:

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

Funkcija f je navzgor omejena, $\sup f = 1$ in navzdol omejena, $\inf f = 0$. Torej je omejena. Omenimo še, da vrednost 1, tj. svoj supremum, zavzame, svojega infima, torej vrednosti 0, pa ne zavzame. $\diamondsuit$

Definicija 43 *Število $x \in \mathcal{D}_f$ imenujemo **ničla funkcije** f, če velja:*

$$f(x) = 0.$$

Zgled: Poiščimo ničle funkcije f, ki je dana s predpisom $f(x) = x^2 - 5x + 6$.

$$0 = x^2 - 5x + 6,$$

torej

$$0 = (x-2)(x-3)$$

Ničli sta $x = 2$ in $x = 3$. $\diamondsuit$

Definicija 44 *Naj bosta $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkciji. Funkcije $f + g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $f - g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, $f \cdot g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ definiramo takole*

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \qquad x \in \mathcal{D}$$

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x), \qquad x \in \mathcal{D}$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)g(x), \qquad x \in \mathcal{D}$$

funkcijo $f/g : \mathcal{D} \setminus \{t : g(t) = 0\} \to \mathbb{R}$ pa takole

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \qquad x \in \mathcal{D} \setminus \{t : g(t) = 0\}$$

Definicija 45 *Naj bosta $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, funkciji. Definirajmo funkciji*

$$\max\{f, g\} : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$$

in

$$\min\{f, g\} : \mathcal{D} \to \mathbb{R},$$

takole

$$\max\{f,g\}(x) = \max\{f(x), g(x)\},$$

$$\min\{f,g\}(x) = \min\{f(x), g(x)\}.$$

Zgled: Funkciji f in g sta dani s predpisoma: $f(x) = x$, $g(x) = x^2$. Tedaj je

$$\max\{f,g\}(x) = \begin{cases} x^2, & x \le 0, \\ x, & 0 < x \le 1, \\ x^2, & x > 1, \end{cases}$$

$$\min\{f,g\}(x) = \begin{cases} x, & x \le 0, \\ x^2, & 0 < x \le 1, \\ x, & x > 1. \end{cases}$$

$\Diamond$

3.3 Zveznost funkcije

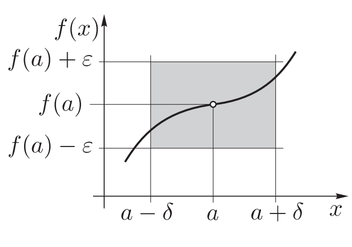
Naj bo f funkcija, definirana na $\mathcal{D}$. Pravimo, da je f ***zvezna*** v točki $a \in \mathcal{D}$, če je $f(x)$ poljubno blizu $f(a)$, če je le x dovolj blizu a. Bolj natančno to povemo takole:

Definicija 46 (zveznost 1) *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je **zvezna** v točki $a \in \mathcal{D}$, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da je*

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

čim je $x \in \mathcal{D}$ takšen, da je $|x - a| < \delta$.

Opomba: Konstruirajmo to na sliki v primeru, ko $\mathcal{D}$ vsebuje še nek odprt interval s središčem v a.



Slika 3.3: Zveznost f v točki a

V tem primeru mora za vsak $\varepsilon > 0$ obstajati $\delta > 0$, da za vsak x iz intervala $(a-\delta, a+\delta)$ slika $f(x)$ leži v intervalu $\big(f(a)-\varepsilon, f(a)+\varepsilon\big)$.

Definicija 47 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathbb{R}$ neka množica. Če je $a \in \mathcal{D}$ in $\delta > 0$, tedaj množico*

$$\{x \in \mathcal{D} : \ |x-a| < \delta\}$$

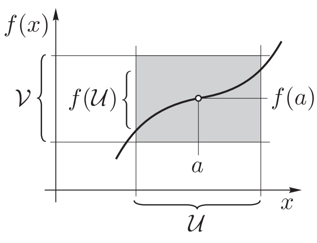
imenujemo δ-okolica točke a (v množici $\mathcal{D}$).

Opomba: Naj bo $\mathcal{D} = [c, d]$ zaprt interval v $\mathcal{R}$. Če je $c < a < d$, potem so za dovolj majhne $\delta > 0$, δ-okolice točke a intervali $(a-\delta, a+\delta)$. Če pa je npr. $a = c$ in $\delta < d - c$, pa je δ-okolica točke a polodprti interval $[a, a+\delta)$.

Definicijo zveznosti lahko zapišemo tudi takole:

Definicija 48 (zveznost 2) *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da f preslika δ-okolico točke $a \in \mathcal{D}$, v ε-okolico točke $f(a)$.*

Definicija 49 (zveznost 3) *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$, če za vsako okolico $\mathcal{V}$ točke $f(a)$ obstaja takšna okolica $\mathcal{U}$ točke $a \in \mathcal{D}$, da je $f(\mathcal{U}) \subseteq \mathcal{V}$, slika 3.4.*



Slika 3.4: Zveznost f v točki a, definirana z okolicami

Zgled: Naj bo

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{če je } x \le 4 \\ 3, & \text{če je } x > 4. \end{cases}$$

Funkcija f ni zvezna v točki 4. Pokažemo, da obstaja $\varepsilon > 0$, za katerega ni takšnega $\delta > 0$, da iz $|x-4| < \delta$ sledi $|f(x) - f(4)| < \varepsilon$, tj. $|f(x) - 2| < \varepsilon$.

Vzemimo npr. $\varepsilon = \frac{1}{2}$. Tedaj primernega $\delta > 0$ ni, saj so poljubno blizu 4 točke x, za katere je $|f(x) - 2| = 1$, torej $|f(x) - 2| > \varepsilon$. Res, če x vzamemo večji od 4, je vedno $f(x) = 3$, torej $|3 - 2| = 1 > \varepsilon$. Seveda so takšni x-i lahko poljubno blizu 4. $\diamondsuit$

V naslednjem izreku bomo povedali, kako je pojem zveznosti povezan s pojmom konvergence zaporedij.

Izrek 24 (karakterizacija zveznosti z zaporedji) *Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkcija. Tedaj je f zvezna v točki $a \in \mathcal{D}$ natanko takrat, ko za vsako zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$, ki konvergira k točki a, zaporedje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $f(a)$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo f zvezna v $a \in \mathcal{D}$. Naj bo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ zaporedje, ki konvergira k a. Torej $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Radi bi pokazali, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljuben. Ker je f zvezna v a, obstaja takšen $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, sledi $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$. Ker je $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da za $n \geq n_0$ velja $|x_n - a| < \delta$, torej je $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da za $n \geq n_0$ velja $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$, kar pomeni, da $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $f(a)$.

($\Leftarrow$) Denimo, da za vsako zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ iz $\mathcal{D}$, ki konvergira k a velja, da je $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$. Radi bi pokazali, da je f zvezna v a. Denimo, da f ni zvezna v a. Torej obstaja $\varepsilon > 0$, da so poljubno blizu a točke $x \in \mathcal{D}$, za katere je $|f(x) - f(a)| \geq \varepsilon$, kar pomeni, da obstaja zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$, ki konvergira k a, da je $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ za vse $n \in \mathbb{N}$. To je protislovje s predpostavko, ki pokaže, da je f zvezna v a. $\square$

Opomba: Zveznost funkcije f v točki a je lokalna lastnost; to, ali je f zvezna v a ali ni, je odvisno le od obnašanja funkcije blizu točke a.

Izrek 25 *Naj bosta $f, g : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkciji. Naj bosta f in g zvezni v $a \in \mathcal{D}$. Tedaj so tudi funkcije $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$ zvezne v točki a. V primeru, ko je $g(a) \neq 0$, je funkcija f/g definirana v neki okolici točke a in zvezna v točki a.*

Dokaz: Naj bo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}$ zaporedje, ki konvergira k a. Dokažimo najprej zveznost $f+g$. Ker sta f, g zvezni v a, po izreku 24 velja $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$, $\lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(a)$, torej je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(f+g)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\big(f(x_n)+g(x_n)\big)\\ &\overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) + \lim_{n\to\infty} g(x_n)\\ &= f(a)+g(a)\\ &= (f+g)(a)\end{aligned}$$

$(*)$ f, g zvezni v točki a.

Torej je po izreku 24 $f+g$ zvezna v a. Zveznost funkcij $f-g$ in $f\cdot g$ pokažemo na podoben način.

Naj bo $g(a) \neq 0$. Tedaj je zaradi zveznosti funkcija g različna od 0 v neki okolici točke a. Res, postavimo $\varepsilon = \frac{|g(a)|}{2}$. Zaradi zveznosti g v a obstaja $\delta > 0$, da je $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ za vsak x, za katerega je $|x-a| < \delta$. Tedaj je

$$\begin{aligned}|g(x)| &\geq |g(a)| - |g(x)-g(a)|\\ &\geq |g(a)| - \frac{|g(a)|}{2}\\ &\geq \frac{|g(a)|}{2},\end{aligned}$$

kar pomeni, da je $g(x) \neq 0$ za vse x, za katere je $|x-a| < \delta$.

Dokažimo sedaj zveznost funkcije f/g v točki a. Naj $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$ konvergira k a. Brez izgube splošnosti predpostavimo, da so vsi x_n, $(n \in \mathbb{N})$, vsebovani v $(a-\delta, a+\delta)$. Po izreku 24 zaradi zveznosti g zaporedje $\{g(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira h $g(a)$. Naprej, $g(x_n) \neq 0$, $(n \in \mathbb{N})$, torej lahko tvorimo kvociente $f(x_n)/g(x_n)$. Tedaj je

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f}{g}\right)(x_n) &= \lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}\\ &\overset{(*)}{=} \frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}\\ &= \frac{f(a)}{g(a)}\\ &= \left(\frac{f}{g}\right)(a).\end{aligned}$$

Sledi, da je f/g res zvezna v točki a. $\square$

Opomba: Dokazovanje zgoraj, z uporabo zaporedij, je lahko in elegantno. Morda pa se pri tem nekoliko zabriše bistvo zveznosti. Dokaze je mogoče napraviti tudi direktno, z uporabo ε-δ definicije zveznosti. Ilustrirajmo to in dokažimo, da je $f+g$ zvezna v a, če sta f in g zvezni v a.

Dokaz (izreka 25): Naj bosta f in g zvezni v točki a. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v a, obstaja $\delta_1 > 0$, da je $|f(x) - f(a)| < \varepsilon/2$ za vse $x \in \mathcal{D}$, za katere je $|x - a| < \delta_1$. Ker je g zvezna v a, obstaja $\delta_2 > 0$, da je $|g(x) - g(a)| < \varepsilon/2$ za vse $x \in \mathcal{D}$, za katere je $|x - a| < \delta_2$. Če je torej $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, za vse $x \in \mathcal{D}$, $|x - a| < \delta$, velja

$$\begin{aligned} \big|(f+g)(x) - (f+g)(a)\big| &= \big|f(x) + g(x) - f(a) - g(a)\big| \\ &\leq |f(x) - f(a)| + |g(x) - g(a)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Za vsak $\varepsilon > 0$ torej obstaja $\delta > 0$, da je $\big|(f+g)(x) - (f+g)(a)\big| < \varepsilon$, čim je $x \in \mathcal{D}$, $|x - a| < \delta$. Funkcija $f + g$ je torej zvezna v točki a. $\square$

Izrek 26 *Naj bosta f in g funkciji. Naj bo $\mathcal{R}_f \subseteq \mathcal{D}_g$, tako da je definirana $g \circ f$. Naj bo f zvezna v $a \in \mathcal{D}_f$ in g zvezna v $f(a) \in \mathcal{D}_g$. Tedaj je $g \circ f$ zvezna v $a \in \mathcal{D}_f = \mathcal{D}_{g\circ f}$.*

Dokaz: Naj bo $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in \mathcal{D}_f$ zaporedje, ki konvergira k a. Ker je f zvezna v a, po izreku 24 zaporedje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $f(a)$. Ker je g zvezna v $f(a)$, po istem izreku zaporedje $\{g\big(f(x_n)\big)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $g\big(f(a)\big)$. Ker je bilo zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno, po izreku 24 sledi, da je $g \circ f$ zvezna v a. $\square$

Navedimo nekaj primerov zveznih funkcij.

1. Konstanta je zvezna funkcija v vsaki točki.

2. Neposredno iz definicije zveznosti sledi, da je identiteta, tj. funkcija $f(x) = x$, zvezna v vsaki točki.

3. Polinomi so zvezne funkcije v vsaki točki.

4. Racionalne funkcije (kvocienti polinomov) so (po okrajšanju skupnih faktorjev) zvezne v vsaki točki, razen v tistih, kjer je imenovalec enak 0. Takšne točke imenujemo poli.

Definicija 50 (zveznost na množici) *Naj bo f definirana na $\mathcal{D}$. Funkcija f je zvezna na množici $\mathcal{D}$, če je zvezna v vsaki točki $x \in \mathcal{D}$.*

Opomba: Če je $\mathcal{I}$ interval, s $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ označimo prostor vseh funkcij f, ki so zvezne na $\mathcal{I}$. $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ je linearen prostor - vsota funkcij iz $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ je spet v $\mathcal{C}(\mathcal{I})$, produkt funkcije iz $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ in konstante je spet v $\mathcal{C}(\mathcal{I})$. Še več, $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ je algebra, saj je produkt funkcij iz $\mathcal{C}(\mathcal{I})$ spet v $\mathcal{C}(\mathcal{I})$.

3.4 Enakomerna zveznost

Naj bo f funkcija na $\mathcal{D}$. Naj bo f zvezna na $\mathcal{D}$, tj. zvezna v vsaki točki a iz $\mathcal{D}$. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $\delta_a > 0$, da bo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, čim je $|x - a| < \delta_a$, $x \in \mathcal{D}$. Vprašanje je, ali lahko po izbiri $\varepsilon > 0$ najdemo $\delta_a > 0$, ki ne bo odvisen od a, tj. ali lahko za vsak $\varepsilon > 0$ najdemo $\delta > 0$, da bo $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, čim bo $|x - a| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, *za vse* a iz $\mathcal{D}$. Odgovor je v splošnem *ne*. Zato definiramo:

Definicija 51 (enakomerna zveznost) *Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ funkcija. f je **enakomerno zvezna** na $\mathcal{D}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da velja $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$, za vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$, za katera je $|x_1 - x_2| < \delta$.*

Enakomerna zveznost torej nekako pomeni, da je v vseh točkah definicijskega območja $\mathcal{D}$ funkcija zvezna „na enak način”.

Zgled: Naj bo $f(x) = 1/x$ na $\mathcal{D} = (0, 1)$. Ali je f na $\mathcal{D}$ enakomerno zvezna?

Funkcija f je seveda zvezna na $\mathcal{D}$. Pokazali bomo, da ni enakomerno zvezna na $\mathcal{D}$, da torej obstaja nek $\varepsilon > 0$, za katerega ni nobenega δ, da iz $|x_1 - x_2| < \delta$ sledi $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Naj bo $0 < t < 1/2$ in naj bo $x_1 = t$, $x_2 = 2t$. Tedaj je $|x_1 - x_2| = t$ in $|f(x_1) - f(x_2)| = |1/t - 1/(2t)| = 1/(2t) > 1$. Če t izberemo dovolj majhen, dobimo torej na $(0,1)$ točki x_1, x_2, ki sta poljubno blizu, velja pa $|f(x_1)-f(x_2)| > 1$. Za $\varepsilon = 1$ torej ni nobenega δ, da bi veljalo $|f(x_1)-f(x_2)| < \varepsilon$ za vse $x_1, x_2 \in (0,1)$, za katera je $|x_1 - x_2| < \delta$. Funkcija f torej ni enakomerno zvezna na $(0,1)$. $\diamondsuit$

Vsaka funkcija, ki je enakomerno zvezna na $\mathcal{D}$, je seveda zvezna na $\mathcal{D}$. Pri tem pa ne pozabimo, da obstajajo zvezne funkcije, ki niso enakomerno zvezne. Takšen primer je npr. zgornji zgled.

Izrek 27 (o pokritjih) *Naj bo $\mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, $\mathcal{I} = [a,b]$ in naj bo za vsak $x \in \mathcal{I}$ dan nek $\delta(x) > 0$. Za vsak $x \in \mathcal{I}$ naj bo $\mathcal{O}_x$ $\delta(x)$-okolica točke $x \in \mathcal{I}$, torej $\mathcal{O}_x = \big(x - \delta(x), x + \delta(x)\big)$. Tedaj v družini okolic $\{\mathcal{O}_x : x \in \mathcal{I}\}$ obstaja končno število takšnih, ki pokrivajo $\mathcal{I}$, tj. obstajajo $n \in \mathbb{N}$ in $x_1, \ldots, x_n \in \mathcal{I}$, da je*

$$\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{x_1} \cup \mathcal{O}_{x_2} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{x_n}.$$

Dokaz: Okolica $\mathcal{O}_a = \big(a-\delta(a), a+\delta(a)\big)$ pokrije vsak interval $[a,c]$, pri katerem je $c < a + \delta(a)$. Naj bo $\mathcal{S}$ množica vseh tistih $c \in [a,b]$, za katere velja, da je mogoče interval $[a,c]$ pokriti s končno mnogo okolicami naše družine $\{\mathcal{O}_x : x \in \mathcal{I}\}$. Množica $\mathcal{S}$ ni prazna, saj vsebuje točke med a in $a + \delta(a)$. Ker je $\mathcal{S} \subset [a,b]$, je $\mathcal{S}$ navzgor omejena. Potem ima natančno zgornjo mejo $M = \sup \mathcal{S}$. Jasno je $a < M \leq b$. Pokažemo najprej, da je $M \in \mathcal{S}$. Ker je $M - \delta(M) < M$ in $M = \sup \mathcal{S}$, obstaja $c \in \mathcal{S}$, da je $c > M - \delta(M)$. Interval $[a,c]$ je torej mogoče pokriti s končno mnogo okolicami naše družine, saj je $c \in \mathcal{S}$. Če k tem okolicam dodamo še $\mathcal{O}_M$, pokrijemo ves interval $[a,M]$. Torej smo $[a,M]$ pokrili s končno mnogo okolicami naše družine. Torej je $M \in \mathcal{S}$.

Pokazati moramo še, da je $M = b$. Recimo, da je $M < b$. Okolice $\mathcal{O}_{x_1}$, $\mathcal{O}_{x_2}$,…,$\mathcal{O}_{x_n}$, $\mathcal{O}_{x_M}$, ki pokrijejo $[a,M]$, pokrijejo $[a,c]$ za vsak c, $M < c <$

$M + \delta(M)$, torej $[a, c]$ za nek c, $M < c \leq b$. Torej bi bil $c > M$ tudi v $\mathcal{S}$, kar pa je v nasprotju s tem, da je $M = \sup \mathcal{S}$. Torej je $M = b$ in $[a, M] = [a, b]$ lahko pokrijemo s končno okolicami naše družine. $\square$

Opomba: Število $\delta(x)$ je v splošnem odvisno od x. Izrek torej pove, da je mogoče iz množice odprtih intervalov $\big(x - \delta(x), x + \delta(x)\big)$ izbrati končno mnogo takih, ki skupaj pokrijejo $\mathcal{I}$.

Opomba: Bistveno je, da je $\mathcal{I}$ zaprt interval, da torej vsebuje svoji krajišči. Za ilustracijo naj bo $\mathcal{J} = (0, 1]$ in za vsak $x \in \mathcal{J}$ naj bo $\delta(x) = x/2$. Tedaj ni mogoče najti končne množice $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{J}$, da bi bilo

$$\big(x_1 - \delta(x_1), x_1 + \delta(x_1)\big) \cup \ldots \cup \big(x_n - \delta(x_n), x_n + \delta(x_n)\big) \supset \mathcal{J}.$$

Posledica 13 *Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ zaprt interval. Iz vsakega pokritja $\mathcal{K}$ z odprtimi intervali je mogoče izbrati končno podpokritje, tj. če je $\{\mathcal{I}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ družina odprtih intervalov in je $\mathcal{K} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{I}_\gamma$, tedaj obstajajo $n \in \mathbb{N}$ in $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n \in \Gamma$, da je*

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \mathcal{I}_{\gamma_n}.$$

Dokaz: Naj bo $\mathcal{K} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{I}_\gamma$, kjer je $\{\mathcal{I}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ družina odprtih intervalov. Za vsak $x \in \mathcal{K}$ obstaja $\gamma(x) \in \Gamma$, da je $x \in \mathcal{I}_{\gamma(x)}$ in zato $\delta(x) > 0$, da je $\big(x - \delta(x), x + \delta(x)\big) \subset \mathcal{I}_{\gamma(x)}$. Po pomožnem izreku (o pokritjih) obstaja n in $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{K}$, da je

$$\mathcal{K} \subset \big(x_1 - \delta(x_1), x_1 + \delta(x_1)\big) \cup \ldots \cup \big(x_n - \delta(x_n), x_n + \delta(x_n)\big)$$

torej, ker je $\big(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)\big) \subset \mathcal{I}_{\gamma(x_i)}$ za vsak i, dobimo

$$\mathcal{K} \subset \mathcal{I}_{\gamma(x_1)} \cup \ldots \cup \mathcal{I}_{\gamma(x_n)}.$$

$\square$

Izrek 28 *Naj bo funkcija $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$. Tedaj je f enakomerno zvezna na $[a, b]$.*

Dokaz: Naj bo f zvezna na $\mathcal{D} = [a, b]$, tj. zvezna v vsaki točki $\mathcal{D}$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna, za vsak $x \in \mathcal{D}$ obstaja takšen $\delta(x) > 0$, da je $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon/2$, čim je $|\tilde{x} - x| < 2\delta(x)$, $\tilde{x} \in \mathcal{D}$. Za poljuben $x \in \mathcal{D}$, naj bo $\mathcal{O}_x = \big(x - \delta(x), x + \delta(x)\big)$. Po prejšnjem izreku obstajajo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathcal{D}$, da je $\mathcal{D} \subset \mathcal{O}_{x_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{x_n}$. Naj bo $\delta = \min\{\delta(x_1), \ldots, \delta(x_n)\}$. Naj bosta $x, \tilde{x} \in \mathcal{D}$ takšna, da je $|\tilde{x} - x| < \delta$. Potem je x vsebovan v vsaj eni od okolic, npr. v $\mathcal{O}_{x_i}$. Torej je $x \in \big(x_i - \delta(x_i), x_i + \delta(x_i)\big)$, tj. $|x_i - x| < \delta(x_i)$. Ker je $|\tilde{x} - x| < \delta$, je

$$\begin{aligned} |\tilde{x} - x_i| &\le |\tilde{x} - x| + |x - x_i| \\ &< \delta + \delta(x_i) \\ &\le 2\delta(x_i). \end{aligned}$$

Potem je $|f(\tilde{x}) - f(x_i)| < \varepsilon/2$ in naprej

$$\begin{aligned} |f(x) - f(\tilde{x})| &\le |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(\tilde{x})| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Za vsak ε torej obstaja $\delta > 0$, da $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$, čim je $x, \tilde{x} \in \mathcal{D}$, $|x - \tilde{x}| < \delta$. Torej je f res enakomerno zvezna na $\mathcal{D}$. □

3.5 Osnovne lastnosti zveznih funkcij

Izrek 29 *Naj bo funkcija f zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$ in naj ima v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti, tj.*

$$f(a)f(b) < 0,$$

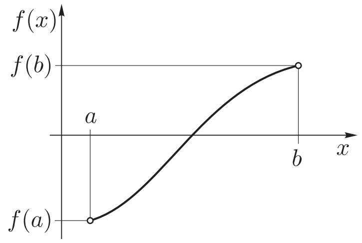
Tedaj ima f vsaj eno ničlo na (a, b), tj. obstaja vsaj ena točka $\xi \in (a, b)$, da je

$$f(\xi) = 0.$$

Dokaz: Uporabili bomo t.i. metodo bisekcije. Naj bo $c = (a + b)/2$. Če je $f(c) = 0$, potem smo ničlo že našli. Če pa je $f(c) \neq 0$, označimo z $[a_1, b_1]$ tistega od intervalov $[a, c]$ in $[c, b]$, na katerem ima f v krajiščih nasprotno predznačeni vrednosti. Izračunamo $c_1 = (a_1 + b_1)/2$ in postopek nadaljujemo. Lahko se zgodi, da po končno korakih pridemo do točke c_n, da je $f(c_n) = 0$ in smo ničlo našli. Druga možnost je, da se to nikoli ne zgodi. Tako dobimo zaporedje vloženih intervalov:

$$[a, b] \supseteq [a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \ldots ,$$

za katere velja: *i)* $b_n - a_n = (b-a)/2^n$ in *ii)* $f(a_n) \cdot f(b_n) < 0$. Dolžine intervalov $[a_n, b_n]$ gredo torej proti 0, ko gre n proti ∞.



Slika 3.5: Funkcija je v krajiščih intervala različno predznačena

V poglavju 2.5 smo izrek o zaporedju vloženih intervalov, katerih dolžine gredo proti 0, že srečali. Od tam pa vemo, da obstaja natanko ena točka, ki je vsebovana v vseh intervalih. Torej $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \xi$. Zaradi zveznosti f je potem $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = \lim_{n\to\infty} f(b_n) = f(\xi)$. Ker pa velja $f(a_n)f(b_n) < 0$, sledi $\lim_{n\to\infty} f(a_n) \lim_{n\to\infty} f(b_n) \leq 0$ oz. $f(\xi)^2 \leq 0$. Torej $f(\xi) = 0$. $\square$

Izrek 30 *Naj bo f zvezna na zaprtem intervalu $\mathcal{D} = [a, b]$. Tedaj je f na $\mathcal{D}$ omejena. Naj bosta $M = \sup f$ in $m = \inf f$. Tedaj obstajata $x_M, x_m \in \mathcal{D}$, da je $f(x_M) = M$ in $f(x_m) = m$, tj. funkcija ima na $\mathcal{D}$ minimum in maksimum.*

Dokaz: Naj bo f zvezna na $\mathcal{D} = [a, b]$. Denimo, da f ni navzgor omejena. Tedaj za vsak $n \in \mathbb{N}$ obstaja takšen $x_n \in [a, b]$, da je $f(x_n) > n$. Zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ je zaporedje števil, ki so vsa v $\mathcal{D}$, torej je omejeno. Potem ima $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ vsaj eno stekališče, npr. x_0, ki je očitno spet v $\mathcal{D}$. Iz definicije stekališča in oblike zaporedja je razvidno, da zavzame $f(x_n)$ v vsaki okolici x_0 poljubno velike vrednosti. Funkcija v tej točki torej ne more biti zvezna. To pa je v protislovju z začetno predpostavko, da je f na $\mathcal{D}$ zvezna, torej je f na $\mathcal{D}$ navzgor omejena. Podobno pokažemo, da je f navzdol omejena.

Naj bo $M = \sup f$. Supremum obstaja, ker je f omejena. Pokažemo, da obstaja $x_M \in \mathcal{D}$, da je $f(x_M) = M$. Jasno je $f(x) \leq M$ za vse $x \in \mathcal{D}$. Predpostavimo, da je $f(x) < M$ za vse $x \in \mathcal{D}$, tj. $M - f(x) > 0$ za vse $x \in \mathcal{D}$. Funkcija $x \mapsto M - f(x)$ je zvezna in strogo pozitivna na $\mathcal{D}$. Iz izrekov 24 in 13 sledi, da je tudi funkcija $x \mapsto 1/\big(M - f(x)\big)$ zvezna na $\mathcal{D}$. Torej je navzgor omejena, tj. obstaja $A < \infty$, da je $1/\big(M - f(x)\big) \leq A$ za vse $x \in \mathcal{D}$. Sledi $M - f(x) \geq 1/A$, tj. $f(x) \leq M - 1/A$ za vse $x \in \mathcal{D}$, kar pa je v protislovju s tem, da je M supremum funkcije. Torej obstaja $x_M \in \mathcal{D}$, da je $f(x_M) = M$. Podobno pokažemo, da obstaja x_m, da je $f(x_m) = m$. $\square$

Opomba: Če je f zvezna na odprtem intervalu, ni nujno omejena. Primer je $f(x) = 1/x$ na $(0, 1)$. Če je g zvezna in omejena na odprtem intervalu, ne zavzame nujno svoje natančne zgornje meje $\sup g$ in svoje natančne spodnje meje $\inf g$. Primer je $g(x) = x$ na $(1, 2)$. Če je h omejena, $M = \sup h$ in $m = \inf h$ in $h(x_M) = M$ in $h(x_m) = m$, x_m in x_M ni nujno en sam. Primer je $h(x) = \sin(x)$ na $\mathbb{R}$.

Posledica 14 *Naj bo $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Naj bo $m = \inf f$ in $M = \sup f$. Tedaj f zavzame vse vrednosti med m in M, tj. za vsak c iz $[m, M]$ obstaja x_c iz $[a, b]$, tako da je $f(x_c) = c$.*

Dokaz: Če je f konstantna, tj. $x_m = x_M$ oz. $m = M$, ni kaj dokazovati. Naj bo torej f nekonstantna funkcija, $x_m \neq x_M$. Po prejšnjem izreku obstajata točki x_m, x_M, da $f(x_m) = m$ in $f(x_M) = M$, $m \neq M$.

Oglejmo si $g(x) = f(x) - c$, kjer je $m < c < M$ na $[x_m, x_M]$. Funkcija g je na $[x_m, x_M]$ zvezna. Za $c = m$ oz. $c = M$ nam prejšnji izrek pove, da je vrednost c zavzeta. Vrednosti funkcije g v krajiščih intervala $[x_m, x_M]$ sta: $g(x_m) = f(x_m) - c = m - c$ in $g(x_M) = f(x_M) - c = M - c$. Pri tem je $g(x_m) < 0$ in $g(x_M) > 0$. Potem ima g po že dokazanem izreku na $[x_m, x_M]$ vsaj eno ničlo x_0. Torej je $g(x_0) = 0$ oziroma $f(x_0) = c$. $\square$

3.6 Monotone zvezne funkcije

Definicija 52 *Naj bo $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$ interval. Funkcija $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ je* ***naraščajoča*** *(oz. strogo naraščajoča), če iz $x_1, x_2 \in \mathcal{I}$ in $x_1 < x_2$ sledi $f(x_1) \leq f(x_2)$ (oz. $f(x_1) < f(x_2)$). Podobno definiramo* ***padajoče*** *in strogo padajoče funkcije.*

Definicija 53 *Funkcija je* ***monotona****, če je naraščajoča ali padajoča.*

Opomba: Edine funkcije, ki so hkrati naraščajoče in padajoče, so konstantne funkcije.

Izrek 31 *Naj bo f strogo monotona zvezna funkcija na $[a,b]$. Tedaj je f^{-1} zvezna na intervalu $[f(a), f(b)]$.*

Dokaz: Naj bo f strogo naraščajoča in zvezna. Tedaj je f injektivna in zaradi zveznosti zavzame vse vrednosti od najmanjše $f(a)$ do največje $f(b)$ z njima vred. Torej f preslika $[a,b]$ bijektivno na $[f(a), f(b)]$. f^{-1} torej obstaja in preslika $[f(a), f(b)]$ na $[a,b]$.

Naj bo $y_0 \in \big(f(a), f(b)\big)$. Označimo $f^{-1}(y_0) = x_0$, tj. $y_0 = f(x_0)$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Brez izgube splošnosti lahko rečemo, da je $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon) \subseteq (a,b)$. Oglejmo si $f(x_0 - \varepsilon)$ in $f(x_0 + \varepsilon)$. Zaradi stroge monotonosti velja $f(x_0 - \varepsilon) < y_0 < f(x_0 + \varepsilon)$. Če je $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$, je $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$. Naj bo δ manjše od števil $y_0 - f(x_0 - \varepsilon)$ in $f(x_0 + \varepsilon) - y_0$. Če je $y_0 - \delta < y < y_0 + \delta$, je gotovo $f(x_0 - \varepsilon) < y < f(x_0 + \varepsilon)$. Sledi $x_0 - \varepsilon < f^{-1}(y) < x_0 + \varepsilon$. Torej za vsak $y_0 \in \big(f(a), f(b)\big)$ velja, da za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja $\delta > 0$, da za $|y - y_0| < \delta$ velja $|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)| < \varepsilon$. Torej je f^{-1} zvezna na $\big(f(a), f(b)\big)$. Zveznost v krajiščih $f(a)$ in $f(b)$ dokažemo na podoben način. $\square$

Opomba: Funkcija f, s predpisom $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$, strogo narašča na $[0, \infty)$. Če je n lih, f strogo narašča na $(-\infty, \infty)$. Torej je funkcija g s predpisom $g(x) = \sqrt[n]{x}$ zvezna na $[0, \infty)$. Če je n lih, pa je g zvezna na $(-\infty, \infty)$.

Če je $r = \frac{m}{n}$, je $f(x) = x^{m/n} = \sqrt[n]{x^m}$, f kompozicija zveznih funkcij. Torej velja

Posledica 15 *Funkcija f s predpisom $f(x) = x^r$ je zvezna na $(0, \infty)$ za vsak racionalen r. Če je $r > 0$, je zvezna tudi v 0.*

3.7 Zveznost posebnih funkcij

Naj bo $a > 0$. a^x že znamo definirati za vsak $x \in \mathbb{R}$. Če je $x = \lim r_n$, je $a^x = \lim a^{r_n}$. Od tod sledi

$$a^{x+y} = a^x a^y,$$

tj. adicijski izrek za eksponentno funkcijo.

Izrek 32 *Naj bo $f : x \mapsto a^x$ **eksponentna funkcija**, $a > 0$, $f : \mathbb{R} \to (0, \infty)$.*

i) če je $a > 1$, je f strogo naraščajoča

ii) če je $a < 1$, je f strogo padajoča

iii) če je $a = 1$, je f konstantna, torej $f(x) = 1 \quad (x \in \mathbb{R})$

Za poljuben $a > 0$, $a \neq 1$, je f zvezna funkcija povsod na $\mathbb{R}$ in njena zaloga vrednosti je $(0, \infty)$.

Dokaz: Najprej preverimo monotonost. *i)* $a > 1$. Naj bo $x_1 < x_2$. $a^{x_2} = a^{x_1} a^{x_2 - x_1}$. Ker je $x_2 - x_1 > 0$, je $a^{x_2 - x_1} > 1$ in zato $a^{x_2} > a^{x_1}$. *ii)* $a < 1$. Pokažemo podobno. *iii)* Očitno.

Preveriti moramo še zveznost. Naj bo $a > 1$. Vemo že, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da je $|a^h - 1| < \varepsilon$, čim je $|h| < \delta$, $h \in \mathbb{Q}$, tj. $1 - \varepsilon < a^h < 1 + \varepsilon$, za vsak $|h| < \delta$, $h \in \mathbb{Q}$. Ker je f naraščajoča, ta neenakost velja za vse realne $|h| < \delta$. To pomeni, da je f, $f(x) = a^x$, zvezna v $x = 0$ ($f(0) = 1$). Naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$ poljuben. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja $\delta > 0$, da za $|h| < \delta$ velja: $|a^h - 1| < \varepsilon / a^{x_0}$. Naj bo $x \in \mathbb{R}$ takšen, da je $|x - x_0| < \delta$. Tedaj je

$$\begin{aligned} |f(x) - f(x_0)| &= |a^x - a^{x_0}| \\ &= a^{x_0} |a^{x - x_0} - 1| \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Vemo: $\lim_{n\to\infty} a^n = \infty$. Ker je funkcija f, dana s predpisom $f(x) = a^x$, zvezna, zavzame vse vrednosti med a in ∞, tj. vse vrednosti, večje od a, na intervalu $[1, n]$, $n \in \mathbb{N}$, vse vrednosti med a in a^n, torej na $[1, \infty)$ vse vrednosti med a in ∞. Podobno vidimo, da funkcija f zavzame na $(-\infty, 1)$ vse vrednosti iz $(0, a)$. Torej f na $\mathbb{R}$ zavzame vse vrednosti med 0 in ∞ in $\mathbb{R}$ preslika bijektivno na $(0, \infty)$. $\square$

Opomba: Iz zveznosti eksponentne funkcije sledi tudi $(a^x)^y = a^{xy}$ za vse x, y. Podobno je sklepanje v primeru, ko je $a < 1$.

Definicija 54 *Naj bo $0 < a < \infty$, $a \neq 1$. Inverzno funkcijo funkcije f, $f(x) = a^x$, imenujemo **logaritemska funkcija** in pišemo:*

$$f^{-1}(x) = \log_a(x).$$

Funkcija $\log_a$ torej preslika $(0, \infty)$ bijektivno na $\mathbb{R}$. Jasno $y = \log_a x$ pomeni isto kot $a^y = x$.

Ker je inverz strogo monotone zvezne funkcije spet zvezna funkcija, sledi

Posledica 16 *Funkcija $\log_a$ je zvezna funkcija na $(0, \infty)$. Če je $a > 1$, je strogo naraščajoča, če je $a < 1$, je strogo padajoča.*

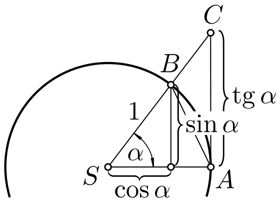
$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y, \quad x, y \in (0, \infty)$$

$$\log_a x^\lambda = \lambda \log_a x, \quad x \in (0, \infty)$$

Opomba: Če je $a = e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, govorimo o naravnem logaritmu in pišemo:

$$\log_e x = \ln x.$$

Opomba: Oglejmo si sedaj trigonometrične funkcije. Najprej si poglejmo sliko 3.6.



Slika 3.6: Razmerja med sin, cos, tg na enotskem krogu

Oglejmo si ploščine likov na sliki 3.6:

- ploščina trikotnika SAB je: $p = 1/2 \sin\alpha$
- ploščina krožnega izseka SAB je: $p = 1/2\ \alpha$
- ploščina trikotnika SAC je: $p = 1/2 \operatorname{tg}\alpha$

Za kot $0 \leq \alpha < \pi/2$ velja torej neenakost

$$\sin\alpha \leq \alpha \leq \operatorname{tg}\alpha,$$

ki jo bomo uporabili pozneje.

Trditev 19 *Funkcija* sin *je zvezna na* $\mathbb{R}$.

Dokaz: Naj bo $x_0 \in \mathbb{R}$. Naj bo $x = x_0 + h$, $(x - x_0 = h)$.

$$\begin{aligned} \sin x - \sin x_0 &= \sin(x_0 + h) - \sin x_0 \\ &= 2\cos\big((2x_0 + h)/2\big)\sin(h/2), \end{aligned}$$

torej če je $|h| < \pi/2$, je

$$\begin{aligned} |\sin x - \sin x_0| &\leq 2\,|\sin(h/2)| \\ &\leq 2\,|h/2| \\ &= |h|. \end{aligned}$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ in naj bo $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/2\}$. Čim je $|x - x_0| < \delta$, je torej

$$|\sin x - \sin x_0| < \varepsilon.$$

Funkcija sin je torej zvezna v x_0. □

Iz osnovnih zvez med trigonometričnimi funkcijami sledi naslednja posledica.

Posledica 17 *Funkcije* cos, tg, ctg *so zvezne povsod, kjer so definirane.*

Nazadnje si oglejmo še ***ciklometrične funkcije***. Ciklometrične funkcije so inverzne funkcije trigonometričnih funkcij. Ker pa trigonometrične funkcije niso injektivne, jih moramo najprej zožiti na primerne intervale.

(a) Funkcija $x \mapsto \sin x$, zožena na $[-\pi/2, \pi/2]$ je injektivna in interval $[-\pi/2, \pi/2]$ bijektivno preslika na $[-1, 1]$. Inverzno funkcijo te funkcije imenujemo arcsin. Torej je funkcija arcsin definirana na $[-1, 1]$ in ta interval preslika na $[-\pi/2, \pi/2]$. Torej je za vsak x med -1 in 1 $\arcsin x$ tisti kot med $-\pi/2$ in $\pi/2$, katerega sinus je enak x, tj. $y = \arcsin x$ pomeni $\sin y = x$.

    Po znanem izreku sledi, da je arcsin zvezna funkcija na $[-1, 1]$.

(b) Funkcija $x \mapsto \cos x$, zožena na $[0, \pi]$ je injektivna in interval $[0, \pi]$ bijektivno preslika na $[-1, 1]$. Inverzno funkcijo te funkcije imenujemo arccos. Torej je funkcija arccos definirana na $[-1, 1]$ in ta interval preslika na $[0, \pi]$. Torej je za vsak x med -1 in 1 $\arccos x$ tisti kot med 0 in π, katerega kosinus je enak x, tj. $y = \arccos x$ pomeni $\cos y = x$.

    Po znanem izreku sledi, da je arccos zvezna funkcija na $[-1, 1]$.

(c) Funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} x$, zožena na $(-\pi/2, \pi/2)$, je injektivna in interval $(-\pi/2, \pi/2)$ bijektivno preslika na $(-\infty, \infty)$. Inverzno funkcijo te funkcije imenujemo arctg. Torej je funkcija arctg definirana na $(-\infty, \infty) = \mathbb{R}$ in $\mathbb{R}$ bijektivno preslika na $(-\pi/2, \pi/2)$. Torej je za vsak $x \in \mathbb{R}$ $\operatorname{arctg} x$ tisti kot med $-\pi/2$ in $\pi/2$, katerega tangens je enak x, tj. $y = \operatorname{arctg} x$ pomeni $\operatorname{tg} y = x$.

    Po znanem izreku sledi, da je arctg zvezna funkcija na $\mathbb{R}$.

3.8 Limita funkcije

Intuitivno lahko definiramo ***limito funkcije*** takole: število A je limita funkcije f v točki x_0, če je vrednost $f(x)$ poljubno blizu A, kakor hitro je x dovolj blizu x_0.

Definicija 55 (limite funkcije) *Naj bo funkcija f definirana v neki okolici točke a, $(a-r, a+r)$, $r > 0$, razen morda v točki a. Število A je limita funkcije f, ko gre x proti a, $x \neq a$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen $\delta > 0$, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$, čim je $|x - a| < \delta$, $x \neq a$. Če to velja, potem pišemo*

$$A = \lim_{x \to a} f(x).$$

Pravimo tudi, da ima funkcija f v točki a limito A.

Opazimo, da nikjer v definiciji ne nastopa $f(a)$, t.j vrednost funkcije v točki a. Zato je nepomembno, ali je f sploh definirana v tej točki. Tudi če je, je vseeno, kakšno vrednost ima.

Zgled:

1.
$$f(x) = \begin{cases} x, & x \neq 2 \\ 10, & x = 2 \end{cases} \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 2, \ \ (\neq f(2) = 10)$$

2.
$$f(x) = \begin{cases} \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

   $\lim_{x \to 0} \sin 1/x$ ne obstaja. Ta funkcija je sicer omejena v okolici točke 0, vendar vedno hitreje oscilira, ko gre x proti 0.

3. Iz neenakosti $\sin x \leq x \leq \operatorname{tg} x$ pri x blizu 0, $x \neq 0$, sledi

$$\frac{1}{\sin x} \geq \frac{1}{x} \geq \frac{\cos x}{\sin x},$$

   če je $x > 0$ in zato

$$1 \geq \frac{\sin x}{x} \geq \cos x,$$

   če je $x > 0$ in enako za $x < 0$, x blizu 0. Ker je $\lim_{x \to 0} \cos x = 1$, od tod sledi

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

$\Diamond$

Opomba: $\lim_{x\to a} f(x)$, če obstaja, je takšna vrednost A, ki so ji vrednosti $f(x)$ poljubno blizu, če je le x, $(x \neq a)$, dovolj blizu a. Če se spomnimo, je funkcija f (definirana ne samo v okolici točke a) zvezna v točki a natanko tedaj, ko so vrednosti $f(x)$ poljubno blizu $f(a)$, če je le x dovolj blizu a. (Dovolj je slednje zahtevati za $x \neq a$, saj je pri $x = a$ seveda $f(x) = f(a)$). Torej bi lahko zveznost funkcije definirali tudi z limito, in sicer takole: f je zvezna v točki a, če

(i) f ima limito v točki a

(ii) ta limita je enaka $f(a)$.

Podobno kot pri zveznosti, lahko tudi limito funkcije opišemo z zaporedji.

Izrek 33 *Funkcija f, definirana v okolici $\mathcal{U}$ točke a, razen morda v a, ima limito L, ko gre x proti a, $x \neq a$, natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{U}$, $x_n \neq a$, ki konvergira k a, tj. $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, zaporedje funkcijskih vrednosti $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k L.*

Iz računskih pravil za limite zaporedij izpeljemo naslednja pravila za računanje z limitami:

Naj bosta f, g funkciji, definirani v okolici $\mathcal{U}$ točke a, razen morda v točki a. Naj obstajata limiti $\lim_{x\to a} f(x)$ in $\lim_{x\to a} g(x)$. Tedaj obstajajo limite $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$, $\lim_{x\to a}(f-g)(x)$, $\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x)$ in velja

$$\lim_{x\to a}(f+g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f-g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$
$$\lim_{x\to a}(f\cdot g)(x) = \lim_{x\to a} f(x) \lim_{x\to a} g(x)$$

Če je $g(x) \neq 0$, $x \in \mathcal{U} \setminus \{a\}$, in $\lim_{x\to a} g(x) \neq 0$, tedaj obstaja tudi $\lim_{x\to a} \frac{f}{g}(x)$ in velja

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}.$$

Definicija 56 *Naj bo f definirana na $(a-r,a)$ za nek $r>0$. Pravimo, da je A* ***leva limita funkcije*** *f v točki a, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja takšen $\delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$, čim je $a-\delta<x<a$.*

To pomeni, da je $f(x)$ poljubno blizu A za vse x, ki so levo od a in dovolj blizu a.

Oznaka:

$$\begin{aligned} A &= f(a-) \\ &= f(a-0) \\ &= \lim_{x\uparrow a} f(x) \\ &= \lim_{h\uparrow 0} f(a+h) \end{aligned}$$

Definicija 57 *Naj bo f definirana na $(a,a+r)$ za nek $r>0$. Pravimo, da je A* ***desna limita funkcije*** *f v točki a, če za vsak $\varepsilon>0$ obstaja takšen $\delta>0$, da je $|f(x)-A|<\varepsilon$, čim je $a<x<a+\delta$.*

To pomeni, da je $f(x)$ poljubno blizu A za vse x, ki so desno od a in dovolj blizu a.

Oznaka:

$$\begin{aligned} A &= f(a+) \\ &= f(a+0) \\ &= \lim_{x\downarrow a} f(x) \\ &= \lim_{h\downarrow 0} f(a+h) \end{aligned}$$

Tudi za leve in desne limite velja analog izreka 33 in enaka računska pravila kot za limite.

Trditev 20 *Naj bo f definirana v okolici točke a. Tedaj $\lim_{x\to a} f(x)$ obstaja* *natanko tedaj, ko obstajata leva in desna limita in sta enaki, tj.*

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = \lim_{x\downarrow a} f(x) = \lim_{x\to a} f(x).$$

Zgled: Oglejmo si limito funkcije f s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} x, & x > 3, \\ 5, & x = 3, \\ x^2, & x < 3. \end{cases}$$

$$\lim_{x\uparrow 3} f(x) = 9,$$

$$\lim_{x\downarrow 3} f(x) = 3,$$

$$\lim_{x\to 3} f(x) \quad \text{limita ne obstaja.}$$

$\Diamond$

Izrek 34 *Naj bo f monotona na $[a, b]$. Tedaj za vsak $c \in (a, b)$ obstajata $f(c-0)$ in $f(c+0)$, tj. leva in desna limita. Funkcija f je nezvezna v c natanko tedaj, ko $f(c-0) \neq f(c+0)$. Če je f naraščajoča, je $f(c-0) \leq f(c) \leq f(c+0)$. Če je f padajoča, je $f(c-0) \geq f(c) \geq f(c+0)$.*

Dokaz: Naj bo f naraščajoča in naj bo $a < c < b$. Tedaj je $f(x) \leq f(c)$ za vsak $x < c$. $\sup\{f(x) : x < c\} = A$ obstaja, tj. $f(x) \leq A$ za vsak $x < c$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Število $A - \varepsilon$ ni več zgornja meja. Obstaja torej x_0, $a \leq x_0 < c$ tako, da $A - \varepsilon < f(x_0)$. Zaradi monotonosti velja: $A - \varepsilon < f(x) \leq A$ za vsak x, $x_0 < x < c$. Naj bo $x_0 = c - \delta$. Tedaj je $A - \varepsilon < f(x) \leq A$ za vsak x, $c - \delta < x < c$. Torej ima f levo limito v točki c in je $f(c-0) = A$. Ker je $f(x) \leq f(c)$ za vsak $a \leq x < c$, je $f(c-0) \leq f(c)$. Podobno dokažemo obstoj $f(c+0)$ in pokažemo, da je $f(c) \leq f(c+0)$. $\square$

Če je f monotona in ni zvezna v c, $c \in (a, b)$, potem razliko $f(c+0) - f(c-0)$ imenujemo ***skok funkcije*** f v točki c.

Izrek 35 *Monotona funkcija na $[a, b]$ ima kvečjemu števno mnogo točk nezveznosti.*

Dokaz: Naj bo f naraščajoča. Naj bo $\mathcal{N}$ množica točk nezveznosti za f. Naj bo c točka nezveznosti, $a < c < b$. Tedaj obstaja racionalno število r_c, da je $f(c-0) < r_c < f(c+0)$. Naj bo $d > c$ še ena točka nezveznosti. Zaradi monotonosti je

$$r_c < f(c+0) \leq f\left(\frac{c+d}{2}\right) \leq f(d-0) < r_d,$$

oz. $r_c \neq r_d$, $r_d \in \mathbb{Q}$. Torej je preslikava $c \mapsto r_c$ z $\mathcal{N}$ v neko podmnožico množice racionalnih števil injektivna. Torej ima $\mathcal{N}$ manjšo ali enako moč kot $\mathbb{Q}$, torej je $\mathcal{N}$ kvečjemu števna. □

Definicija 58 *Naj bo f definirana na (a, ∞). Število A je limita funkcije f, ko gre x čez vse meje, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen B, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vsak $x > B$. To označimo*

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A.$$

Zgled:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+x}{x^2+1} = \lim_{x\to\infty} \frac{1+\frac{1}{x}}{1+\frac{1}{x^2}} = 1$$

◊

Definicija 59 *Naj bo f definirana na $(-\infty, a)$. Število A je limita funkcije f, ko gre x po negativnih vrednostih čez vse meje, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšen B, da je $|f(x) - A| < \varepsilon$ za vsak $x < B$. To označimo*

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = A.$$

Zgled:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3-x}{x^6+2} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^5}}{1+\frac{2}{x^6}} = 0$$

◊

Tudi pri limitah funkcij ima smisel ***Cauchyjev pogoj***. Pravimo, da funkcija, definirana v okolici točke a, razen morda v a, izpolnjuje Cauchyjev pogoj pri a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|f(x) - f(\tilde{x})| < \varepsilon$, za vse $x, \tilde{x}$, za katere je $0 < |x - a| < \delta$ in $0 < |\tilde{x} - a| < \delta$.

Tudi za limite funkcij velja

Trditev 21 *Funkcija f ima limito v točki a natanko tedaj, ko zadošča Cauchy-jevemu pogoju. Podobno za limite $x \to \infty$ oz. $x \to -\infty$.*

Zgled: Vemo, da je

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \quad \text{in} \quad \lim_{n\to-\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e,$$

za $n \in \mathbb{N}$. Pokažimo še, da je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e \quad \text{in} \quad \lim_{x\to-\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e,$$

za $x \in \mathbb{R}$. Naj bo $n = [x]$, (tj. n je celi del števila x). Velja: $n \leq x \leq n+1$. Tedaj je:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1+\frac{1}{x}\right)^x < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Pri tem velja, ko gre $x \to \infty$, gre tudi $n \to \infty$.

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}\frac{1}{1+\frac{1}{n+1}} = e$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n}\right) = e$$

Torej je

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e.$$

$\Diamond$

Omenimo še primer, ko gre funkcijska vrednost $f(x)$ na lep način čez vse meje, ko gre x proti a.

Naj bo funkcija f definirana na $(a-r, a)$ za nek $r > 0$. Če za vsak še tako velik pozitiven p obstaja $\delta > 0$, da je

$$f(x) > p, \quad \text{za vse} \quad x, \quad a-\delta < x < a,$$

pišemo

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = +\infty.$$

Podobno, če za vsak še tako velik negativen q obstaja $\delta > 0$, da je

$$f(x) < q, \quad \text{za vse} \quad x, \quad a-\delta < x < a,$$

pišemo

$$\lim_{x\uparrow a} f(x) = -\infty.$$

Analogno definiramo pojme

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\downarrow a} f(x) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty, \ldots$$

Poglavje 4

Odvod

4.1 Definicija in računanje odvoda

Definicija 60 *Naj bo f definirana v okolici točke a. Če limita*

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

obstaja, pravimo, da je f ***odvedljiva*** *v točki a in*

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

imenujemo ***odvod funkcije*** *f v točki a.*

Opomba: Izraz $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ imenujemo ***diferenčni kvocient***.

Opomba: Včasih namesto pisave zgoraj uporabimo

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

kjer je $h = x - a$ sprememba argumenta x glede na točko a.

Zgled: Izračunajmo odvod funkcije $x \mapsto f(x) = x^2$ v točki $a = 3$.

$$\begin{aligned} f'(3) &= \lim_{x\to 3} \frac{x^2 - 3^2}{x - 3} \\ &= \lim_{x\to 3} \frac{(x+3)(x-3)}{x-3} \\ &= \lim_{x\to 3}(x+3) \\ &= 6 \end{aligned}$$

◊

Trditev 22 *Če je funkcija f v točki a odvedljiva, potem je f v a zvezna.*

Dokaz:

$$\begin{aligned} \lim_{x\to a} f(x) &= \lim_{x\to a}\left[f(a) + (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a}\right] \\ &= f(a) + \lim_{x\to a}(x-a)\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \\ &= f(a) + 0f'(a) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

□

4.1.1 Geometrijski pomen odvoda

Naj bo f odvedljiva v točki a in naj točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(x, f(x)\big)$ določata sekanto grafa funkcije f, tj. premico skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(x, f(x)\big)$. Njen naklonski koeficient je

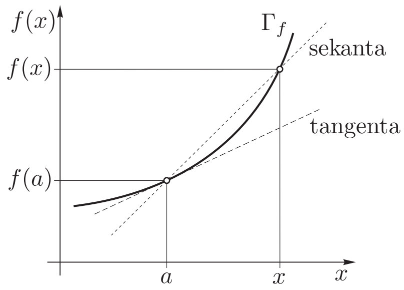
$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Pošljimo x proti a. Točka $\big(x, f(x)\big)$ tedaj steče po grafu proti točki $\big(a, f(a)\big)$ (saj gre $f(x) \to f(a)$ zaradi zveznosti funkcije f v točki a), njen naklonski koeficient $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ pa gre proti

$$f'(a) = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}.$$

Torej je $f'(a)$ naklonski koeficient premice skozi $\big(a, f(a)\big)$, h kateri limitirajo sekante, ko gre $x \to a$. Tej premici bomo rekli tangenta na graf funkcije f v točki $\big(a, f(a)\big)$. Njena enačba je torej

$$y - f(a) = f'(a)(x-a).$$



Slika 4.1: Geometrijski pomen odvoda

Definicija 61 *Naj bo f definirana na $(a-r, a]$ za nek $r > 0$. Če obstaja limita*

$$\lim_{x \uparrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

jo imenujemo ***levi odvod*** *funkcije f v točki a. Naj bo f definirana na $[a, a+r)$ za $r > 0$. Če obstaja limita*

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

jo imenujemo ***desni odvod*** *funkcije f v točki a.*

Trditev 23 *Funkcija f je odvedljiva v a natanko tedaj, kadar obstajata levi in desni odvod in sta enaka.*

Opomba: Naj omenimo, da obstajajo funkcije na $[a, b]$, ki so zvezne na $[a, b]$, niso pa odvedljive v nobeni točki $[a, b]$.

Zgled: Poiščimo odvode.

1. funkcije $f : x \mapsto |x|$ v točki $a = 0$;

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \frac{|x|}{x}$$

$$\lim_{x \downarrow 0} \frac{|x|}{x} = 1, \qquad \lim_{x \uparrow 0} \frac{|x|}{x} = -1$$

f ni odvedljiva v $a = 0$, ima pa v 0 desni odvod, ki je enak 1 in levi odvod, ki je enak -1.

2. $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $a = 0$, $f'(0) = ?$

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(h)-f(0)}{h} &= \lim_{h\to 0}\frac{\sqrt[3]{h}}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt[3]{h^2}}\end{aligned}$$

ne obstaja. V tem primeru ima graf Γ_f v $(0,0)$ navpično tangento.

$\Diamond$

Definicija 62

1. *Funkcija f je odvedljiva na (a,b), če je odvedljiva v vsaki točki intervala (a,b).*

2. *Funkcija f je odvedljiva na $[a,b]$, če je odvedljiva na (a,b) in ima v krajišču a desni, v krajišču b pa levi odvod.*

Definicija 63 *Naj bo f definirana na intervalu $\mathcal{D}$ in f naj bo v kakšni točki iz $\mathcal{D}$ odvedljiva. Naj bo $\mathcal{D}' = \{x \in \mathcal{D} : f'(x) \text{ obstaja}\}$ in $x \mapsto f'(x)$ funkcija, definirana na $\mathcal{D}'$. To funkcijo imenujemo odvod funkcije f in jo označimo z f'.*

Zgled:

1. Funkcija f, $f(x) = |x|$, je definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}$ in odvedljiva povsod, razen v 0. Potem je $\mathcal{D}' = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

2. Funkcija f, $f(x) = x^2$ je definirana na $\mathcal{D} = \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}f'(x) &= \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{x^2+2hx+h^2-x^2}{h}\\ &= \lim_{h\to 0}\frac{h(2x+h)}{h}\\ &= 2x\end{aligned}$$

in je odvedljiva povsod na $\mathbb{R}$. Torej je $\mathcal{D}' = \mathbb{R}$.

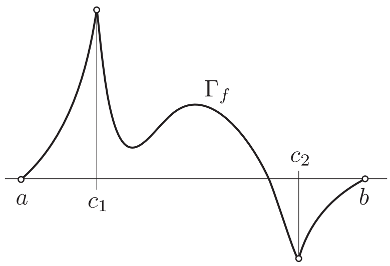
$\Diamond$

Definicija 64 *Funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je* ***zvezno odvedljiva*** *na $[a,b]$, če je f odvedljiva na $[a,b]$ in je njen odvod $f' : [a,b] \to \mathbb{R}$ zvezna funkcija.*

Naj omenimo, da obstajajo funkcije, ki so odvedljive na intervalu $\mathcal{D}$, vendar odvod ni zvezna funkcija na $\mathcal{D}$.

Definicija 65 *Zvezna funkcija $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ je odsekoma zvezno odvedljiva na $[a,b]$, če je odvedljiva povsod, razen v končno mnogo točkah $c_1, c_2, \ldots, c_k$, $a < c_1 < c_2 < \ldots < c_k < b$, v katerih obstajata levi in desni odvod. Na vsakem podintervalu, $[a,c_1], [c_1,c_2], \ldots, [c_k,b]$, ki jih določajo točke, v katerih ni odvedljiva, pa je zvezno odvedljiva.*

Zgled: Funkcija f je zvezna povsod na $[a,b]$, ni pa odvedljiva v točkah c_1 in c_2.



Slika 4.2: Odsekoma zvezno odvedljiva funkcija

Na podintervalih $[a,c_1]$, $[c_1,c_2]$ in $[c_2,b]$ je f zvezno odvedljiva. ♢

Zvezno odvedljivim funkcijam pravimo ***gladke funkcije***.

4.1.2 Pravila za odvajanje

Iz pravil za računanje z limitami funkcij izpeljemo pravila za računanje odvodov.

1. $f(x) = c$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{0}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

2. Naj bosta f in g odvedljivi v točki a, tedaj so v a odvedljive tudi funkcije

   i) $(f+g)(a) \Rightarrow (f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$,

   ii) $(f-g)(a) \Rightarrow (f-g)'(a) = f'(a) - g'(a)$,

   iii) $(f \cdot g)(a) \Rightarrow (f \cdot g)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$,

   iv) $\left(\frac{f}{g}\right)(a) \Rightarrow \left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g(a)^2}, \quad g(a) \neq 0.$

   Dokaz:

   i) očitno (limita vsote je vsota limit).

   ii) očitno (limita razlike je razlika limit).

   iii) $(f \cdot g)'(a) =$

$$
\begin{aligned}
&= \lim_{h\to 0} \frac{(fg)(a+h) - (fg)(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)g(a+h) - f(a)g(a+h) + f(a)g(a+h) - f(a)g(a)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left[\frac{f(a+h) - f(a)}{h} g(a+h)\right] + \lim_{h\to 0} \left[f(a)\frac{g(a+h) - g(a)}{h}\right] \\
&= f'(a)g(a) + f(a)g'(a)
\end{aligned}
$$

   iv) podobno kot *iii)*.

$\square$

Posledica 18 *Če je f odvedljiva v a in $\lambda \in \mathbb{R}$ konstanta, je*

$$(\lambda f)'(a) = \lambda f'(a).$$

Posledica 19 *Če so $f_1, \ldots, f_n$ odvedljive v a, je*

$$(f_1 \cdot \ldots \cdot f_n)'(a) = f_1'(a) \cdot f_2(a) \cdot \ldots \cdot f_n(a) + \cdots + f_1(a) \cdot f_2(a) \cdot \ldots \cdot f_n'(a).$$

Zgled:

$$(fgh)'(a) = f'(a)g(a)h(a) + f(a)g'(a)h(a) + f(a)g(a)h'(a)$$

$\lozenge$

4.1.3 Odvod kompozituma

Izrek 36 *Naj bo f odvedljiva v a in naj bo g odvedljiva v $f(a)$. Tedaj je $g \circ f$ odvedljiva v a in velja*

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big) f'(a).$$

Oznaka: Označimo z $x \mapsto o(x)$ funkcijo, ki je definirana v okolici točke 0 in ima lastnost, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $|o(x)| \leq \varepsilon |x|$, čim je $|x| < \delta$, tj. da je $o(0) = 0$ in $\lim_{x\to 0} o(x)/|x| = 0$.

Dokaz: Ker je f odvedljiva v a, je

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h},$$

torej

$$f(a+h) - f(a) = f'(a)h + o(h),$$

za vse dovolj majhne h. Ker je g odvedljiva v $f(a)$, je

$$g(f(a) + k) - g\big(f(a)\big) = g'\big(f(a)\big)k + o_1(k),$$

za vse dovolj majhne k. Naj bo $k = f(a+h) - f(a)$ oz. $f(a) + k = f(a+h)$. Od tod sledi, da za vse dovolj majhne h velja

$$\begin{aligned} g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) &= g'\big(f(a)\big)\big(f(a+h) - f(a)\big) + o_1\big(f(a+h) - f(a)\big) \\ &= g'\big(f(a)\big)\big(f'(a)h + o(h)\big) + o_1\big(f'(a)h + o(h)\big). \end{aligned}$$

Preprosto vidimo, da je $o_1\big(f'(a)h + o(h)\big) = o_2(h)$, tj. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\eta > 0$, da je $\big|o_1\big(f'(a)h + o(h)\big)\big| \leq \varepsilon |f'(a)h + o(h)|$ čim je $|f'(a)h + o(h)| < \eta$. Ker gre $o(h)/h \to 0$ pri $h \to 0$, obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi $|f'(a)h + o(h)| < \eta$ in $|f'(a)h + o(h)| = |h|\ |f'(a) + o(h)/h| \leq |h|(|f'(a)| + 1)$. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $0 < |h| < \delta$ sledi $\big|o_1\big(f'(a)h + o(h)\big)\big| \leq \varepsilon(|f'(a)| + 1)|h|$, kar pa pomeni, da je $o_1\big(f'(a)h + o(h)\big) = o_2(h)$. Torej je

$$g\big(f(a+h)\big) - g\big(f(a)\big) = g'\big(f(a)\big)f'(a)h + g'\big(f(a)\big)o(h) + o_2(h).$$

Če obe strani delimo s h in pošljemo h proti 0, v limiti dobimo

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)f'(a)$$

□

Pri odvajanju komponiranih funkcij torej velja ***verižno pravilo***.

$$(g \circ f)' = (g' \circ f) \cdot f'.$$

Izrek 37 *Naj bo f zvezna, strogo monotona funkcija na $[a, b]$. Naj bo $a < c < b$. Denimo, da je f odvedljiva v c in da velja $f'(c) \neq 0$. Tedaj je f^{-1} odvedljiva v točki $d = f(c)$ in velja:*

$$\begin{aligned} (f^{-1})'(d) &= \frac{1}{f'(c)} \\ &= \frac{1}{f'(f^{-1}(d))}. \end{aligned}$$

Dokaz: Denimo, da je f strogo naraščajoča funkcija. Tedaj je f bijekcija iz $[a, b]$ v $[f(a), f(b)]$. Ker je f zvezna in strogo monotona, že vemo, da je f^{-1} zvezna na $[f(a), f(b)]$. Oglejmo si limito diferenčnega kvocienta

$$\begin{aligned} \lim_{y \to d} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(d)}{y - d} &\overset{(*)}{=} \lim_{x \to c} \frac{x - c}{f(x) - f(c)} \\ &= \frac{1}{f'(c)} \quad \left(= \frac{1}{f'\big(f^{-1}(d)\big)} \right). \end{aligned}$$

$(*)$ Pri tem smo pisali $f^{-1}(d) = c$ oz. $f(c) = d$ in $f^{-1}(y) = x$ oz. $f(x) = y$. □

Zgled: $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f^{-1} = \sqrt[3]{x}$ ni odvedljiva v točki $x = 0$. ♢

4.1.4 Odvodi elementarnih funkcij

Odvod konstantne funkcije

$f(x) = c.$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\ &= \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} \\ &= 0 \end{aligned}$$

Odvod potenčne funkcije

i) $f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{N}$. Iz formule za odvod produkta sledi:

$$f'(x) = nx^{n-1}.$$

ii) $f(x) = x^{-m}$, $m \in \mathbb{N}$. Iz formule za odvod kvocienta sledi po indukciji:

$$f'(x) = -mx^{-m-1}.$$

Pri tem smo upoštevali $x^{-m} = 1/x^m$.

iii) $f(x) = x^{1/n}$, $n \in \mathbb{N}$. Funkcija $g : x \mapsto x^n$ je strogo monotona na $(0, \infty)$ pri sodih n in strogo monotona na $(-\infty, \infty)$ pri lihih n. Odvod, $g'(x) = nx^{n-1}$, je različen od 0 povsod, razen v $x = 0$. Torej f je odvedljiva na $(0, \infty)$ pri sodih n in odvedljiva na $(-\infty, \infty) \setminus \{0\}$ pri lihih n.

Iz $f(x) = x^{1/n}$ sledi $f(x)^n = x$. Izračunajmo odvod,

$$nf(x)^{n-1}f'(x) = 1.$$

Torej

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{n}\frac{1}{f(x)^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n(x^{1/n})^{n-1}} \\ &= \frac{1}{n}x^{1/n-1}. \end{aligned}$$

iv) $f(x) = x^{m/n} (= (x^{1/n})^m)$, $n, m \in \mathbb{N}$. Funkcija f je spet odvedljiva povsod, razen v točki $x = 0$. Iz $f(x) = (x^{1/n})^m$ sledi $f(x)^n = x^m$. Izračunajmo odvod, $nf(x)^{n-1}f'(x) = mx^{m-1}$. Torej

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{f(x)^{n-1}} \\ &= \frac{m}{n}\frac{x^{m-1}}{(x^{m/n})^{n-1}} \\ &= \frac{m}{n}x^{m/n-1}. \end{aligned}$$

Odvod logaritemske funkcije

$f(x) = \log x$, $x > 0$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\log(x+h) - \log(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} \right) \\
&= \lim_{h\to 0} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{1}{h}} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{1}{x} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&= \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}}
\end{aligned}$$

Ker je logaritemska funkcija zvezna, je

$$\begin{aligned}
\lim_{h\to 0} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} &= \log \lim_{h\to 0} \left(1 + \frac{h}{x}\right)^{\frac{x}{h}} \\
&\overset{(*)}{=} \log \lim_{t\to \infty} \left(1 + \frac{1}{t}\right)^{t} \\
&= \log e \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$(*)$ Vpeljali smo $t = \frac{x}{h}$ in upoštevali $t \to \infty$ pri $h \to 0$

Torej je

$$f'(x) = \frac{1}{x}.$$

Če je $f(x) = \log_a(x)$, $x > 0$, $a \neq 1$,

$$\begin{aligned}
(\log_a x)' &= \left(\frac{\log x}{\log a}\right)' \\
&= \frac{1}{\log a} \frac{1}{x},
\end{aligned}$$

je torej

$$f'(x) = \frac{1}{\log a} \frac{1}{x}.$$

Odvod eksponentne funkcije

$f(x) = e^x$. Upoštevamo, da je f inverzna funkcija logaritemske funkcije, ki je strogo monotona, odvedljiva, z odvodi, ki niso nikoli enaki 0, torej je že po dokazanem izreku f odvedljiva povsod na $\mathbb{R}$. Izračunajmo odvod;

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = 1$$

oziroma

$$f'(x) = f(x).$$

Torej $f'(x) = e^x$.

Če je $f(x) = a^x$, $a > 0$, $a \neq 1$, je, podobno kot prej

$$f'(x) = \log a \cdot a^x.$$

Odvod (splošne) potenčne funkcije

Ker je $x = e^{\log x}$, $x > 0$, lahko vsako potenčno funkcijo pišemo v obliki

$$f(x) = x^\alpha = e^{\alpha \log x}.$$

Podobno kot prej bomo upoštevali, da iz $f(x) = e^{\alpha \log x}$ sledi $\log f(x) = \alpha \log x \cdot \log e$. Obe strani enačbe odvajamo, od koder sledi

$$\frac{1}{f(x)} f'(x) = \alpha \frac{1}{x}.$$

Vstavimo $f(x) = x^\alpha$ in preuredimo.

$$f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}.$$

Torej v splošnem velja, tj. za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$, ista formula za računanje odvoda potenčne funkcije za vse α_0.

Odvodi kotnih funkcij

i) $f(x) = \sin x$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{\sin(x+h)-\sin(x)}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \frac{2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}}{h} \\
&= \lim_{h\to 0} \left(\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) \\
&\overset{(*)}{=} \cos x
\end{aligned}$$

$(*)$ ker je $\lim_{a\to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$.

ii) $f(x) = \cos x$. Upoštevamo, da je $\cos x = \sin(\pi/2 - x)$, torej

$$f'(x) = -\sin x.$$

iii) $f(x) = \operatorname{tg} x$. Upoštevamo, da je $\operatorname{tg} x = \sin x / \cos x$ in pravilo za odvajanje kvocienta. Tako dobimo

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Odvod ciklometričnih funkcij

i) $f(x) = \arcsin x$. Na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$ je $x \mapsto \sin x$ strogo naraščajoča in odvedljiva funkcija, z odvodom, različnim od 0. Po znanem izreku je njej inverzna funkcija $x \mapsto \arcsin x$ odvedljiva na intervalu $(-1, 1)$. Izračunajmo odvod. Upoštevamo, da iz $f(x) = \arcsin x$ sledi $\sin f(x) = x$. Obe strani enačbe odvajamo in dobimo

$$\cos f(x) \cdot f'(x) = 1.$$

Od tod sledi:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1}{\cos f(x)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 f(x)}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.
\end{aligned}$$

ii) $f(x) = \arccos x$. Sklepamo podobno kot prej, torej

$$f'(x) = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

iii) $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Funkcija $x \mapsto \operatorname{tg} x$ je strogo naraščajoča in odvedljiva na intervalu $(-\pi/2, \pi/2)$, z odvodom, različnim od 0. Po znanem izreku je njej inverzna funkcija $x \mapsto \operatorname{arctg} x$ na $\mathbb{R}$ odvedljiva. Izračunajmo odvod. Upoštevamo, da iz $f(x) = \operatorname{arctg} x$ sledi $\operatorname{tg} f(x) = x$. Obe strani enačbe odvajamo in dobimo

$$\frac{1}{\cos^2 f(x)} f'(x) = 1.$$

Od tod sledi

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos^2 f(x) \\ &\overset{(*)}{=} \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 f(x)} \\ &= \frac{1}{1+x^2}. \end{aligned}$$

$(*)$ Uporabili smo: $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, od koder sledi $1 + \operatorname{tg}^2 x = 1/\cos^2 x$.

Zgled: Odvajaj $f(x) = \log \operatorname{tg} \frac{x}{2}$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left(\log \operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \left(\operatorname{tg} \frac{x}{2}\right)' \\ &= \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{x}{2}} \frac{1}{\cos^2 \frac{x}{2}} \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{2 \cos \frac{x}{2} \sin \frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x} \end{aligned}$$

$\Diamond$

V tabeli 4.1 je navedenih nekaj elementarnih funkcij in njihovih odvodov.

Tabela 4.1: Odvodi elementarnih funkcij

funkcija $x \mapsto f(x) =$	odvod $x \mapsto f'(x) =$	funkcija $x \mapsto f(x) =$	odvod $x \mapsto f'(x) =$
x^n	nx^{n-1}	$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x$
$\log_a x$	$\frac{1}{\log a}\frac{1}{x}$	$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x$
a^x	$a^x \log a$	$\operatorname{th} x$	$\frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}$
$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{cth} x$	$-\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\operatorname{arsh} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{arch} x$	$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$
$\operatorname{ctg} x$	$\frac{1}{-\sin^2 x}$	$\operatorname{arth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\operatorname{arcth} x$	$\frac{1}{1-x^2}$
$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{ax^2+b}$	$-\frac{2ax}{(ax^2+b)^2}$
$\operatorname{arctg} x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{ax^2+1}}$	$-\frac{ax}{(ax^2+1)^{3/2}}$
$\operatorname{arcctg} x$	$-\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{\sqrt{1-ax^2}}$	$\frac{ax}{(1-ax^2)^{3/2}}$

4.2 Diferenciabilnost in diferencial funkcije

Naj bo funkcija f odvedljiva v točki a, tj.

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a).$$

Tedaj velja

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)-f'(a)h}{h}=0.$$

Če števec zgoraj označimo z $o_a(h)$, lahko zapišemo

$$f(a+h)-f(a)=f'(a)h+o_a(h).$$

Pri tem je

$$\lim_{h\to 0}\frac{o_a(h)}{h}=0.$$

To pomeni, da je funkcijo $h\mapsto f(a+h)-f(a)$ pri majhnih h mogoče dobro aproksimirati z linearno funkcijo $h\mapsto f'(a)h$, tj.

$$f(a+h)-f(a)\approx f'(a)h.$$

Dobro „aproksimabilnost" funkcije $h\mapsto f(a+h)-f(a)$ z linearno funkcijo $h\mapsto\mathcal{L}(h)$ pri majhnih h pa imenujemo ***diferenciabilnost***.

Definicija 66 *Funkcija f, definirana v okolici točke a, je* ***diferenciabilna*** *v točki a, če obstaja linearna funkcija $h\mapsto\mathcal{L}(h)$, da velja*

$$f(a+h)-f(a)=\mathcal{L}(h)+o_a(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0}\frac{o_a(h)}{h}=0.$$

Opomba: Linearna funkcija $\mathcal{L}$ je oblike $\mathcal{L}(h)=Ah$, kjer je A neko število. Če obstaja, je ena sama. Če bi bila namreč še kakšna, npr. $\mathcal{K}(h)=Bh$ z zgornjimi lastnostmi, bi z odštevanjem enakosti

$$f(a+h)-f(a)=Ah+o_1(h),$$

$$f(a+h)-f(a)=Bh+o_2(h),$$

kjer je $\lim_{h\to 0} o_1(h)/h = 0$ in $\lim_{h\to 0} o_2(h)/h = 0$, dobili

$$Ah - Bh = o(h),$$

pri čemer je $o(h) = o_1(h) - o_2(h)$ in $\lim_{h\to 0} o(h)/h = 0$. Zgornjo enačbo delimo s h in v limiti, ko gre $h \to 0$ dobimo

$$\lim_{h\to 0} \frac{Ah - Bh}{h} = 0,$$

kar pa je mogoče le, če $A = B$, torej $\mathcal{L} = \mathcal{K}$.

Definicija 67 *Linearno funkcijo $\mathcal{L}$ iz prejšnje definicije imenujemo **diferencial** funkcije f v točki a in jo označimo z df_a.*

Diskusija: Zgoraj smo že videli, da če je f odvedljiva v točki a, tedaj je f v točki a diferenciabilna in df_a je enak preslikavi $h \mapsto f'(a)h$. Velja pa tudi obratno, torej imamo

Izrek 38 *Funkcija f je odvedljiva v točki a natanko tedaj, ko je diferenciabilna v točki a. Tedaj je*

$$(df_a)(h) \equiv f'(a)h.$$

Dokaz: Da iz odvedljivosti sledi diferenciabilnost smo že pokazali. Naj bo sedaj f diferenciabilna v a. Linearna funkcija df_a je oblike $(df_a)(h) \equiv Ah$ za neko število A, torej je

$$f(a+h) - f(a) = Ah + o_a(h),$$

kjer je

$$\lim_{h\to 0} \frac{o_a(h)}{h} = 0.$$

Od tod sledi

$$\lim_{h\to 0} \left(\frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A \right) = \lim_{h\to 0} \frac{o_a(h)}{h} = 0,$$

torej

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

obstaja in je enak A. $\square$

Opomba: Če je funkcija f odvedljiva v točki a, si lahko pri računanju vrednosti funkcije f v bližnji točki $a+h$ pomagamo z diferencialom. Pri majhnih h je

$$f(a+h) - f(a) \approx df_a(h) = f'(a)h,$$

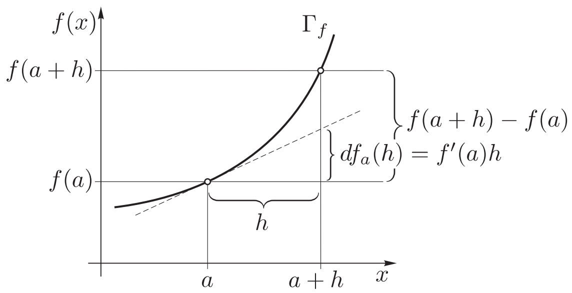
torej je

$$f(a+h) \approx f(a) + f'(a)h,$$

oziroma, če pišemo $a+h=x$, je za x-e blizu a

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a).$$

Ker je $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ enačba tangente na graf funkcije f v točki $\big(a, f(a)\big)$, zgornje pomeni, da tangenta dobro aproksimira graf funkcije f blizu točke $\big(a, f(a)\big)$.



Slika 4.3: Geometrijski pomen diferenciala

Naj še omenimo, da bomo pozneje, ko bomo študirali funkcije več spremenljivk, videli, da pojmov odvedljivost in odvod ni mogoče posplošiti na funkcije več spremenljivk, je pa naravno mogoče posplošiti pojma diferenciabilnost in diferencial.

Ob koncu omenimo še t.i. klasično definicijo diferenciala, ki jo najdemo v številnih knjigah iz fizike in tehnike. Naj bo funkcija f odvedljiva v točki x. Tedaj je

$$f(x+\Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x + o(\Delta x),$$

kjer je

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{o(\Delta x)}{\Delta x} = 0,$$

kjer smo z Δx označili spremembo spremenljivke x. Ko gre Δx proti 0, gresta oba sumanda na desni strani enakosti proti 0, a zaradi lastnosti funkcije o gre drugi sumand proti 0 hitreje od prvega. Prvi sumand $f'(x)\Delta x$ je pri majhnih Δx torej glavni del spremembe $f(x + \Delta x) - f(x)$. Imenujemo ga diferencial funkcije f v točki x ob spremembi Δx. Pišemo

$$df = f'(x)\Delta x.$$

Ker je $(x)' \equiv 1$, je $dx = 1 \cdot \Delta x$, in zato namesto Δx pišemo kar dx. Torej

$$df = f'(x)dx$$

je diferencial funkcije f v točki x, če x spremenimo za dx. Pri majhnih dx je tedaj

$$f(x + dx) - f(x) \approx df = f'(x)dx$$

formula za izračun vrednosti funkcije v bližnji točki, ki jo že poznamo.

4.3 Odvodi višjega reda

Če je funkcija f odvedljiva v vsaki točki intervala $\mathcal{I}$, je f' spet funkcija z $\mathcal{I}$ v $\mathbb{R}$. Če je ta funkcija odvedljiva, dobimo $(f')' = f''$, tj. drugi odvod funkcije f. Vse odvode višjega reda definiramo induktivno: če poznamo $f^{(n)}$, tj. n-ti odvod, lahko poiščemo $n+1$-vi odvod $f^{(n+1)} = (f^{(n)})'$, če seveda obstaja.

Zgled:

1. $f(x) = x^n$, $f'(x) = nx^{n-1}$, $f''(x) = n(n-1)x^{n-2}$,...

   $$f^{(k)}(x) = \frac{n!}{(n-k)!}x^{n-k}, \quad k = 1, \ldots, n$$

   za $k > n$ je $f^{(k)}(x) = 0$.

2. $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$, $f''(x) = 6x$, $f'''(x) = 6$, $f^{iv}(x) = 0$,...

3. $f(x) = 1/x$, $f'(x) = -1/x^2$, $f''(x) = 2/x^3$, $f'''(x) = -6/x^4$,...

$$f^{(k)}(x) = (-1)^k k! x^{-(k+1)}$$

4. $f(x) = \log x$, $f'(x) = 1/x$, $f''(x) = -1/x^2$, $f'''(x) = 2/x^3$,...

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1}(k-1)! x^{-k}$$

$\diamondsuit$

Definicija 68 *Naj bo $\mathcal{I}$ interval.*

1. *Množico vseh zveznih funkcij na $\mathcal{I}$ označimo s $\mathcal{C}(\mathcal{I})$; včasih tudi $\mathcal{C}^0(\mathcal{I})$.*
2. *Množico vseh zvezno odvedljivih funkcij na $\mathcal{I}$ označimo s $\mathcal{C}^1(\mathcal{I})$.*
3. *Množico vseh r-krat zvezno odvedljivih funkcij na $\mathcal{I}$ označimo s $\mathcal{C}^r(\mathcal{I})$. Vsi njihovi odvodi do reda r so zvezne funkcije na $\mathcal{I}$. (Ker je odvedljiva funkcija vedno zvezna, lahko rečemo, da je $\mathcal{C}^r(\mathcal{I})$ množica vseh funkcij na $\mathcal{I}$, ki so r-krat odvedljive, njihov r-ti odvod pa je zvezen.)*
4. *Oznaka: $\mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) = \bigcap_{r=1}^{\infty} \mathcal{C}^r(\mathcal{I})$.*

Množice $\mathcal{C}^r(\mathcal{I})$ so linearni prostori, saj je vsota odvedljivih funkcij odvedljiva in produkt odvedljive funkcije s številom spet odvedljiv, tj.
za $f, g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{I})$ velja

$$f + g \in \mathcal{C}^r(\mathcal{I})$$

in

$$\lambda f \in \mathcal{C}^r(\mathcal{I}), \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Odvajanje $D : f \mapsto f'$ je linearna preslikava, saj je

$$D(f+g) = Df + Dg$$

$$D(\lambda f) = \lambda D(f), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

in

$$D : \mathcal{C}^1(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}(\mathcal{I}),$$

$$D : \mathcal{C}^{r+1}(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}^r(\mathcal{I}),$$

$$D : \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}) \to \mathcal{C}^\infty(\mathcal{I}).$$

so vse linearne preslikave.

Oznaka za odvode višjega reda:

$$f^{(n)} = D^n f = \frac{d^n f}{dx^n}.$$

Zgled: Dokažimo Leibnizovo formulo za n-ti odvod produkta dveh funkcij. (domača vaja)

$$\big(f(x)g(x)\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x).$$

$\diamondsuit$

4.4 Rolleov in Lagrangeev izrek

Trditev 24 *Naj bo f definirana v okolici točke a in naj bo f odvedljiva v a.*

1. *Če je $f'(a) > 0$, tedaj f v točki a narašča, tj. obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) < f(a)$, če $a - \delta < x < a$ in $f(x) > f(a)$, če $a < x < a + \delta$.*

2. *Če je $f'(a) < 0$, tedaj f v točki a pada, tj. obstaja $\delta > 0$, da je $f(x) > f(a)$, če $a - \delta < x < a$ in $f(x) < f(a)$, če $a < x < a + \delta$.*

Dokaz:

1. Naj bo $f'(a) > 0$. Ker je $f'(a) > 0$, obstaja $\varepsilon > 0$, da je $f'(a) - \varepsilon > 0$. Po definiciji je
$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}.$$
Torej obstaja $\delta > 0$ (def. limite), da za $|x - a| < \delta$ velja:
$$\left| f'(a) - \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \right| < \varepsilon.$$
Od tod sledi:
$$0 < f'(a) - \varepsilon < \frac{f(x) - f(a)}{x - a} < f'(a) + \varepsilon,$$
za vsak x, $0 < |x - a| < \delta$. Torej za vse take x velja
$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} > 0.$$

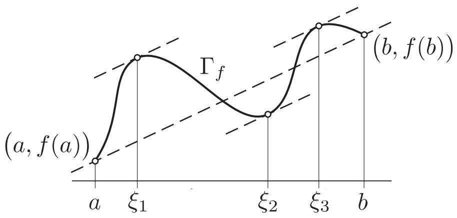
Od tod sledi, da če je $a-\delta < x < a$, je $f(x) - f(a) < 0$ oz. $f(x) < f(a)$. Če pa je $a < x < a+\delta$, je $f(x) - f(a) > 0$ oz. $f(x) > f(a)$.

2. Dokažemo na isti način. □

Izrek 39 (Lagrange) *Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$, ki je odvedljiva na (a,b). Tedaj obstaja takšna točka $\xi \in (a,b)$, da je*

$$f(b) - f(a) = f'(\xi)(b-a).$$

Lagrangeev izrek torej pove, da ima pri teh pogojih graf funkcije vsaj v eni točki tangento, ki je vzporedna s premico skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$, slika 4.4.



Slika 4.4: Geometrijska interpretacija Lagrangeevega izreka

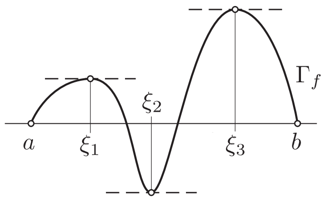
$f'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$ je enak naklonskemu koeficientu premice skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$.

Iz Lagrangeevega izreka sledi ***Rolleov izrek***.

Izrek 40 (Rolle) *Naj bo f zvezna funkcija na $[a,b]$, odvedljiva na (a,b) in naj velja $f(a) = f(b) = 0$. Tedaj obstaja takšna točka $\xi \in (a,b)$, da je*

$$f'(\xi) = 0.$$

Rolleov izrek pravi, da ima pri teh pogojih graf funkcije vsaj v eni točki vodoravno tangento, slika 4.5.



Slika 4.5: Geometrijska interpretacija Rolleovega izreka

Rolleov izrek je poseben primer Lagrangeevega izreka. Izraz $f'(\xi) = \big(f(b) - f(a)\big)/(b-a)$ tudi v tem primeru predstavlja enačbo naklonskega koeficienta premice skozi robni točki, ki pa je sedaj vodoravna, saj $f(a) = f(b) = 0$. Od tod sledi $f'(\xi) = 0$.

Dokaz (Rolleovega izreka): Ker je f zvezna na $[a, b]$, doseže svoj minimum v neki točki $x_m \in [a, b]$ in svoj maksimum v $x_M \in [a, b]$.

i) če je $f(x_m) = f(x_M)$, je funkcija konstantna in lahko ξ poljubno izberemo, saj je $f'(x) = 0$, za vsak $x \in [a, b]$.

ii) če je $f(x_m) < f(x_M)$, potem je vsaj eno od števil različno od 0. Brez izgube splošnosti lahko predpostavimo, da je $f(x_M) \neq 0$. Tedaj postavimo $\xi = x_M$. Jasno je $\xi \in (a, b)$. Pokažemo, da ima ta ξ iskano lastnost.

- če bi veljalo $f'(\xi) > 0$, tedaj bi f v ξ naraščala in imela desno od ξ večje vrednosti od $f(\xi)$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da ima f v ξ maksimum.
- če bi veljalo $f'(\xi) < 0$, bi f v ξ padala in imela levo od ξ večje vrednosti od $f(a)$, kar pa je v protislovju z dejstvom, da ima f v ξ maksimum. Torej je res $f'(\xi) = 0$.

$\square$

Dokaz (Lagrangeevega izreka): Naj bo $F(x) = f(x) - f(a) - A(x-a)$, kjer je A konstanta, ki jo bomo še izbrali. F je zvezna na $[a, b]$ in odvedljiva na (a, b)

in velja $F(a) = 0$. Določimo A tako, da je $F(b) = 0$, torej želimo

$$F(b) = f(b) - f(a) - A(b - a) = 0,$$

kar da

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Funkcija F ob tako izbrani konstanti A zadošča pogojem Rolleovega izreka, tj. $F(a) = F(b) = 0$. Torej obstaja $\xi \in (a, b)$, da je $F'(\xi) = 0$ oziroma

$$F'(\xi) = f'(\xi) - A = 0.$$

Če vstavimo za A zgornjo vrednost, iz zadnje enačbe sledi

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

S tem je Lagrangeev izrek dokazan. □

Posledica 20 *Naj bo f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$. Tedaj je:*

1. $f'(x) \geq 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f$ ***naraščajoča*** *na* $\mathcal{I}$.

2. $f'(x) \leq 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{I} \Leftrightarrow f$ ***padajoča*** *na* $\mathcal{I}$.

3. $f'(x) > 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{I} \Rightarrow f$ ***strogo naraščajoča*** *na* $\mathcal{I}$.

4. $f'(x) < 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{I} \Rightarrow f$ ***strogo padajoča*** *na* $\mathcal{I}$.

Dokaz:

1. ($\Rightarrow$) Naj bo $f'(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathcal{I}$. Naj bosta $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$, torej $b - a > 0$. Iz Lagrangeevega izreka sledi

$$f(b) - f(a) = f'(x)(b - a) \geq 0 \quad \text{oz.} \quad f(b) \geq f(a)$$

($\Leftarrow$) $h > 0$. Iz definicije odvoda sledi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h} \geq 0,$$

saj funkcija narašča na $\mathcal{I}$ oz. $f(x + h) - f(x) \geq 0$.

2. - 4. pokažemo na podoben način kot 1.

□

Posledica 21 *Naj bo f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$. Denimo, da je odvod $f'(x) = 0$, za vsak $x \in \mathcal{I}$. Tedaj je f konstantna funkcija; torej obstaja $c \in \mathbb{R}$, da je $f(x) = c$ za vsak $x \in \mathcal{I}$.*

4.5 Ekstremi funkcij

Ekstrem je skupno ime za ***maksimum*** in ***minimum*** funkcije.

Definicija 69 *Naj bo f funkcija na $\mathcal{D}$. Funkcija f ima v točki $a \in \mathcal{D}$* ***(globalni) maksimum****, če je $f(x) \leq f(a)$, za vsak $x \in \mathcal{D}$. Funkcija f ima v točki $a \in \mathcal{D}$* ***(globalni) minimum****, če je $f(x) \geq f(a)$, za vsak $x \in \mathcal{D}$.*

Ni nujno, da ima funkcija maksimum oz. minimum in če ga ima, to ni nujno v eni sami točki.

Definicija 70 *Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ ima v točki $a \in \mathcal{D}$* ***lokalni ekstrem****, če obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke $a \in \mathcal{D}$, da ima $f|_{\mathcal{U}}$ (zoženje na $\mathcal{U}$), v a maksimum oz. minimum.*

Definicija 71 *Naj bo $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ odvedljiva funkcija. Ničle odvoda $f' : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ imenujemo* ***stacionarne točke*** *funkcije f. Torej je c stacionarna točka, če je*

$$f'(c) = 0.$$

Trditev 25 *Naj bo f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$. Če ima f v točki $a \in \mathcal{I}$ lokalni ekstrem in a ni robna točka intervala $\mathcal{I}$, tedaj je $f'(a) = 0$, tj. a je stacionarna točka za funkcije f.*

Dokaz: Če je $f'(a) > 0$, tedaj f v točki a narašča. Če je $f'(a) < 0$, tedaj f v točki a pada. Torej v nobenem primeru a ne more biti lokalni ekstrem. Torej, če ima f v a lokalni ekstrem, je $f'(a) = 0$. □

Opomba: Če funkcija ne bi bila odvedljiva povsod na $\mathcal{I}$, bi lahko našli lokalni ekstrem v singularni točki. Npr. funkcija $x \mapsto |x|$, $x \in (-1, 1)$, ima minimum v točki $x = 0$, ki je notranja točka intervala $(-1, 1)$. Seveda pa v točki 0 ni odvedljiva.

4.5.1 Strategija iskanja ekstremov dane funkcije

Naj bo f zvezna funkcija na intervalu $[a, b]$, ki je odvedljiva na (a, b). Iz zgornjega sledi, kako poiščemo največjo in najmanjšo vrednost, ki jo f doseže na intervalu $[a, b]$.

1. pogledamo vrednosti f v krajiščih: $f(a)$, $f(b)$
2. pogledamo vrednosti f v stacionarnih točkah

Največja od teh vrednosti je največja vrednost, ki jo f zavzame na $[a, b]$, najmanjša od teh vrednosti pa je najmanjša vrednost, ki jo f zavzame na $[a, b]$.

Zgled: Oglejmo si funkcijo f na intervalu $[-2, 2]$ in poiščimo globalne ekstreme.

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1$$

Poiščemo vrednosti f v krajiščih intervala, tj. $f(-2) = -71/15$ in $f(2) = 41/15$. Stacionarne točke poiščemo z reševanjem enačbe $f'(x) = 0$.

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^4 - x^3 - x^2 + x \\ &= x^4 - x^3 - x^2 + x \\ &= x(x-1)^2(x+1) \\ &= 0 \end{aligned}$$

V enačbo za $f(x)$ vstavimo najdene ničle enačbe $f'(x) = 0$, tj. vrednosti: $x = 0$, $x = 1$ in $x = -1$. Dobimo: $f(0) = 1$, $f(1) = 67/60$ in $f(-1) = 83/60$. Stacionarne točke so torej: $(0, 1)$, $(1, 67/60)$ in $(-1, 83/60)$. Največja in najmanjša vrednost funkcije f na $[-2, 2]$ sta:

$$\begin{aligned} f_{\max} &= \max\{f(-2), f(2), f(0), f(1), f(-1)\} \\ &= \max\{-71/15, 41/15, 1, 67/60, 83/60\} \\ &= 41/15 \\ &= f(2) \end{aligned}$$

in

$$
\begin{aligned}
f_{\min} &= \min\{f(-2), f(2), f(0), f(1), f(-1)\} \\
&= \min\{-71/15, 41/15, 1, 67/60, 83/60\} \\
&= -71/15 \\
&= f(-2).
\end{aligned}
$$

$\diamondsuit$

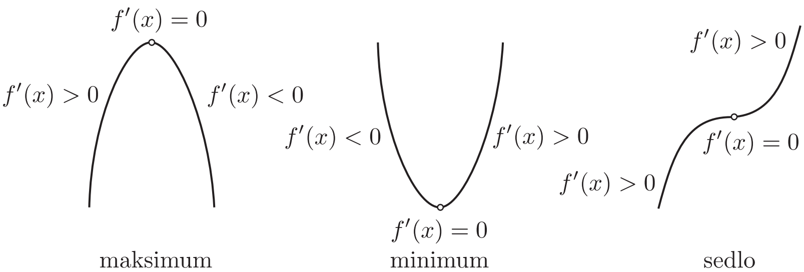
Trditev 26 *Naj bo f odvedljiva v neki okolici točke a in naj bo $f'(a) = 0$, tj. naj bo a stacionarna točka funkcije f.*

1. *če obstaja takšen $\delta > 0$, da je $f'(x) \geq 0$ za $a - \delta < x \leq a$ in $f'(x) \leq 0$ za $a \leq x < a + \delta$ ima f v a* ***lokalni maksimum****.*

2. *če obstaja takšen $\delta > 0$, da je $f'(x) \leq 0$ za $a - \delta < x \leq a$ in $f'(x) \geq 0$ za $a \leq x < a + \delta$ ima f v a* ***lokalni minimum****.*

3. *če obstaja takšen $\delta > 0$, da je $f'(x) > 0$ na $(a-\delta, a+\delta) \setminus \{a\}$ oz. $f'(x) < 0$ na $(a - \delta, a + \delta) \setminus \{a\}$, tedaj f v a nima lokalnega ekstrema. Točka a, ki izpolnjuje te pogoje, se imenuje* ***sedlo****.*

S to trditvijo smo v bistvu povedali: Če prvi odvod pri prehodu skozi stacionarno točko spremeni predznak, je ta stacionarna točka ekstrem. Če predznaka ne spremeni, ta stacionarna točka ni ekstrem, ampak t.i. sedlo.



Slika 4.6: Maksimum, minimum in sedlo

Dokaz:

1. Iz pogoja $f'(x) \geq 0$ za $a - \delta < x \leq a$, $\delta > 0$ sledi, da je f naraščajoča na $a - \delta < x \leq a$. Iz pogoja $f'(x) \leq 0$ za $a \leq x < a + \delta$, sledi, da je f padajoča na $a \leq x < a + \delta$.

$$\max_{(a-\delta,a]} f = f(a) = \max_{[a,a+\delta)} f$$

   Funkcija f ima v a lokalni maksimum.

2. Dokažemo na podoben način.

3. Naj bo $f'(x) > 0$ na $(a - \delta, a) \cup (a, a + \delta)$. f na $(a - \delta, a)$ raste, raste pa tudi na $(a, a + \delta)$. Ima pa stacionarno točko v a, $f'(a) = 0$. Stacionarna točka, ki izpolnjuje te pogoje, je sedlo. Podobno velja za $f'(x) < 0$.

$\square$

Trditev 27 *Naj bo f dvakrat odvedljiva v okolici točke a. Naj bo $f'(a) = 0$.*

1. *Če je $f''(x) \leq 0$ za vse x v okolici točke a, tedaj ima f v a lokalni maksimum.*

2. *Če je $f''(x) \geq 0$ za vse x v okolici točke a, tedaj ima f v a lokalni minimum.*

Dokaz:

1. Ker je $f''(x) \leq 0$, je f' padajoča funkcija, $f'(a) = 0$, zato je $f'(x) \geq 0$, za $x \leq a$ in $f'(x) \leq 0$ za $x \geq a$. (x je iz okolice točke a.) Iz prejšnje trditve sledi: f ima v a lokalni maksimum

2. Dokažemo podobno.

$\square$

Posledica 22 *Naj bo f dvakrat zvezno odvedljiva v okolici točke a. Naj bo $f'(a) = 0$.*

1. *Če je $f''(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum.*

2. *Če je $f''(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum.*

Dokaz:

1. Ker je f'' zvezna funkcija in ker je $f''(a) < 0$, je $f''(x) < 0$ v okolici točke a. Uporabimo prejšnjo trditev.

2. Podobno.

□

Trditev 28 *Naj bo f definirana na $[a, b]$ in odvedljiva v a in v b.*

1. *Če je $f'(a) < 0$, ima f v a lokalni maksimum.*

2. *Če je $f'(a) > 0$, ima f v a lokalni minimum.*

3. *Če je $f'(b) < 0$, ima f v b lokalni minimum.*

4. *Če je $f'(b) > 0$, ima f v b lokalni maksimum.*

Dokaz: Kot v trditvi 24. □

Zgled: Oglejmo si lokalne ekstreme funkcije f, ki je dana s predpisom:

$$f(x) = \frac{x^5}{5} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 1.$$

Poiščimo odvod

$$f'(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x.$$

Rešimo enačbo $f'(x) = 0$.

$$x^4 - x^3 - x^2 + x = x(x-1)^2(x+1) = 0$$

V $x = 0$, $x = 1$ in $x = -1$ ima f stacionarno točko. Stacionarne točke so torej: $(0, 1)$, $(1, 67/60)$ in $(-1, 83/60)$. Izračunamo drugi odvod.

$$f''(x) = 4x^3 - 3x^2 - 2x + 1$$

Vrednosti f'' v stacionarnih točkah so: $f''(0) = 1$, $f''(1) = 0$, $f''(-1) = -4$. Našli smo dve stacionarni točki, tj. $(0, 1)$, ki je lokalni minimum in $(-1, 83/60)$, ki je lokalni maksimum. Prvi neničelni odvod funkcije f v točki $x = 1$ je tretji odvod, $f'''(1) = 4$. Funkcija f oz. Γ_f ima v točki $(1, 67/60)$ sedlo. ◊

4.6 Konveksnost in konkavnost funkcij

Definicija 72 *Naj bo funkcija f definirana na intervalu $\mathcal{I}$. Pravimo, da je f* ***konveksna*** *na $\mathcal{I}$ (od spodaj), če za vsak par $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$, velja*

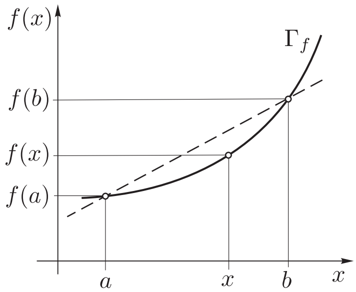
$$f(x) \leq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \qquad a \leq x \leq b,$$

torej, če je

$$f(x) \leq f(a)\left(1 - \frac{x - a}{b - a}\right) + f(b)\frac{x - a}{b - a}.$$

Opomba: če pišemo $t = (x - a)/(b - a)$, je $0 \leq t \leq 1$ in $x = a + t(b - a) = (1 - t)a + tb$. Zgornja neenakost se prepiše v

$$f\big((1 - t)a + tb\big) \leq (1 - t)f(a) + tf(b), \quad 0 \leq t \leq 1.$$



Slika 4.7: Geometrijska interpretacija konveksnosti s sekanto

Opomba: Ker je

$$y = f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a)$$

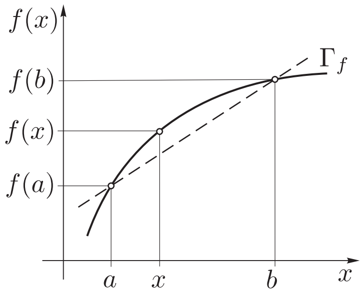
enačba premice (sekante grafa f) skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$ zgornja neenakost pomeni, da graf funkcije f na vsakem intervalu $[a, b] \subset \mathcal{I}$ leži *pod* sekanto skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$.

Definicija 73 *Naj bo funkcija f definirana na intervalu $\mathcal{I}$. Pravimo, da je f* ***konkavna*** *na $\mathcal{I}$ (od spodaj), če za vsak par $a, b \in \mathcal{I}$, $a < b$, velja*

$$f(x) \geq f(a) + \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) \qquad a \leq x \leq b,$$

oziroma, kar je isto

$$f\big((1-t)a+tb\big) \geq (1-t)f(a)+tf(b), \quad 0 \leq t \leq 1$$



Slika 4.8: Geometrijska interpretacija konkavnosti s sekanto

Opomba: Podobno kot prej, ti neenakosti pomenita, da na vsakem intervalu $[a,b] \subset \mathcal{I}$ graf funkcije f leži nad sekanto skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$.

Trditev 29 *Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$.*

1. *Funkcija f je konveksna na $\mathcal{I}$ natanko tedaj, ko za vsak par $a, x \in \mathcal{I}$ velja:*

$$(*) \quad f(x) \geq f(a) + f'(a)(x-a)$$

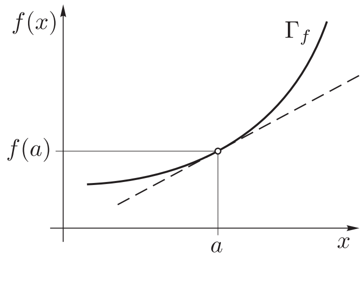
2. *Funkcija f je konkavna na $\mathcal{I}$ natanko tedaj, ko za vsak par $a, x \in \mathcal{I}$ velja:*

$$f(x) \leq f(a) + f'(a)(x-a)$$

Opomba: Ker je

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

enačba tangente na graf f v točki $\big(a, f(a)\big)$, neenakost $(*)$ pomeni, da je graf f povsod na $\mathcal{I}$ nad to tangento.



Slika 4.9: Geometrijska interpretacija konveksnosti s tangento

Dokaz: 1. ($\Rightarrow$) Naj bo f konveksna na $\mathcal{I}$ in naj bo $a, x \in \mathcal{I}$, $a < x$. Naj bo $a < \tilde{x} < x$. Tedaj je

$$f(\tilde{x}) \leq f(a) + \frac{f(x) - f(a)}{x - a}(\tilde{x} - a),$$

torej

$$\frac{f(\tilde{x}) - f(a)}{\tilde{x} - a}(x - a) \leq f(x) - f(a)$$

V limiti, pri $\tilde{x} \to a$, dobimo

$$f'(a)(x - a) \leq f(x) - f(a),$$

torej izraz $(*)$. Enak sklep velja v primeru, ko je $x < a$.

($\Leftarrow$) Naj velja $(*)$ za vsaka $a, b \in \mathcal{I}$. Izberimo $a, b, x \in \mathcal{I}$, $a < x < b$. Tedaj sta zaradi $(*)$ točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$ obe nad tangento na graf f skozi točko $\big(x, f(x)\big)$, kar pomeni, da je vsa daljica s krajiščema $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$ nad omenjeno tangento. To pa pomeni, da je točka $\big(x, f(x)\big)$ pod to daljico, torej je točka $\big(x, f(x)\big)$ pod sekanto skozi $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$. Ker je bil x, $a < x < b$ poljuben, to pomeni, da na $[a, b]$ graf funkcije f leži pod sekanto skozi $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$. Torej je f konveksna na $\mathcal{I}$.

2. Podobno kot 1. $\square$

Izrek 41 *Naj bo f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I} \subseteq \mathbb{R}$. Potem je f konveksna na $\mathcal{I}$ natanko tedaj, ko je f' naraščajoča funkcija na $\mathcal{I}$ in je konkavna na $\mathcal{I}$ natanko tedaj, ko je f' padajoča funkcija na $\mathcal{I}$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo f konveksna na $\mathcal{I}$, $a, b, x \in \mathcal{I}$, $a < x < b$. Naj bo $k = \big(f(b) - f(a)\big)/(b - a)$ smerni koeficient sekante skozi točki $\big(a, f(a)\big)$ in $\big(b, f(b)\big)$. Ker je f konveksna, je $f(x) \leq f(a) + k(x - a) = f(b) + k(x - b)$. Torej je $\big(f(x) - f(a)\big)/(x - a) \leq k$, ker je $x - a > 0$ in $\big(f(x) - f(b)\big)/(x - b) \geq k$, ker je $x - b < 0$. V limiti, pri $x \to a$, dobimo iz prve neenakosti $f'(a) \leq k$ in v limiti, pri $x \to b$, iz druge neenakosti $f'(b) \geq k$. Sledi $f'(a) \leq k \leq f'(b)$, torej $f'(a) \leq f'(b)$, torej f' res narašča na $\mathcal{I}$.

($\Leftarrow$) Naj f' narašča na $\mathcal{I}$. Naj bo $a, x \in \mathcal{I}$, $a < x$. Tedaj po Lagrangeevem izreku obstaja ξ, $a < \xi < x$, da je

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi) \geq f'(a)$$

(desna neenakost je posledica tega, da f' na $\mathcal{I}$ narašča.) Ker je $x > a$, sledi $f(x) - f(a) \geq f'(a)(x - a)$. Podoben sklep naredimo pri $x < a$ in dobimo

$$f(x) \geq f(a) + f'(a)(x - a), \quad x \in \mathcal{I}$$

Funkcija f je torej konveksna. Konkavnost pokažemo na podoben način. $\square$

Posledica 23 *Če je funkcija f dvakrat odvedljiva na $\mathcal{I}$, je f konveksna na $\mathcal{I}$ natanko tedaj, ko je $f''(x) \geq 0$ za vsak $x \in \mathcal{I}$ in je konkavna natanko tedaj, ko je $f''(x) \leq 0$ za vsak $x \in \mathcal{I}$.*

Dokaz: Naj bo f dvakrat odvedljiva na $\mathcal{I}$. Iz posledice 20 sledi: če je $f''(x) \geq 0$, je f' naraščajoča. Če pa je f' naraščajoča iz izreka 41 sledi, da je f konveksna. $\square$

Definicija 74 *Naj bo f definirana na $\mathcal{I}$. Funkcija f ima v točki a $\big($oz. njen graf ima v točki $(a, f(a))\big)$* ***prevoj****, če obstaja takšen $\delta > 0$, da je f konveksna na $(a - \delta, a)$ in konkavna na $(a, a + \delta)$ – ali obratno.*

Posledica 24 *Če je f dvakrat odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$ in če ima Γ_f prevoj v $(a, f(a))$, je $f''(a) = 0$. Velja tudi: če je $f''(a) = 0$ in če f'' pri prehodu točke spremeni predznak, je v točki $(a, f(a))$ prevoj.*

4.7 Skiciranje grafa funkcije

Podali bomo nekaj korakov, ki nam služijo kot opora pri konstrukciji grafa realne funkcije ene spremenljivke.

- Določimo definicijsko območje funkcije $\mathcal{D}_f$.
- Ugotovimo morebitno sodost ali lihost, tj. f je soda, če je $f(-x) \equiv f(x)$ in liha, če je $f(-x) \equiv -f(x)$.

- Izračunamo ničle funkcije, tj. točke x, za katere je $f(x) = 0$.
- Poiščemo točke nezveznosti.
- Izračunamo prvi odvod f'.
- Določimo morebitne navpične in afine asimptote $y = kx + n$.

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} f'(x), \qquad n = \lim_{x\to\pm\infty} [f(x) - xf'(x)]$$

- Določimo singularne točke, tj. točke kjer funkcija ni odvedljiva, ima pa levi in desni odvod.
- Izračunamo stacionarne točke, tj. točke x, za katere je $f'(x) = 0$.
- V krajiščih definicijskega območja in v singularnih točkah izračunamo stranske odvode (če obstajajo).
- Določimo intervale stroge monotonosti, tj. intervale, kjer je $f'(x) > 0$ oz. $f'(x) < 0$. (stacionarne, singularne točke in poli delijo interval)
- Izračunamo drugi odvod f''.
- Določimo lokalne ekstreme.
- Poiščemo točke možnega prevoja, tj. kjer je $f''(x) = 0$.
- Poiščemo intervale konveksnosti $f''(x) \geq 0$ in konkavnosti $f''(x) \leq 0$ ter točke prevoja $f''(x) = 0$, tj. kjer f'' spremeni predznak.
- S skice grafa poskušamo ovrednotiti minimalno in maksimalno vrednost funkcije ter njeno množico vrednosti.

Zgled: Narišimo graf funkcije f.

$$f(x) = \frac{2x^3 - 5x^2 + 14x - 6}{4x^2}$$

Pomagamo si z zgornjo zbirko nasvetov.

Zaradi lažjega računanja zapišemo formulo v obliki:

$$f(x) = \frac{x}{2} - \frac{5}{4} + \frac{7}{2x} - \frac{3}{2x^2}.$$

- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

- Parnost: ni soda, ni liha.

- Ničle: $f(x) = 0$ oz. $2x^3 - 5x^2 + 14x - 6 = 0 \;\Rightarrow\; x = 1/2$.

- Prvi odvod: $f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2} + \frac{3}{x^3} = \frac{x^3-7x+6}{2x^3}$.

- Asimptote: navpična v $x = 0$ in afina $y = kx + n = x/2 - 5/4$.

$$\begin{aligned} k &= \lim_{x\to\pm\infty} f'(x) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{7}{2x^2} + \frac{3}{x^3}\right) \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &= \lim_{x\to\pm\infty} (f(x) - xf'(x)) \\ &= \lim_{x\to\pm\infty} \left(-\frac{5}{4} + \frac{1}{7x} - \frac{9}{2x^2}\right) \\ &= -\frac{5}{4} \end{aligned}$$

- Stacionarne točke: $f'(x) = 0$ oz. $x^3 - 7x + 6 = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = -3$, $f(x_1) = -49/12$; $x_2 = 1$, $f(x_2) = 5/4$; $x_3 = 2$, $f(x_3) = 9/8$.

- Stranski odvodi: vemo že $\lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1/2$, $\lim_{x\to+\infty} f'(x) = 1/2$, $\lim_{x\uparrow 0} f'(x) = -\infty$, $\lim_{x\downarrow 0} f'(x) = \infty$.

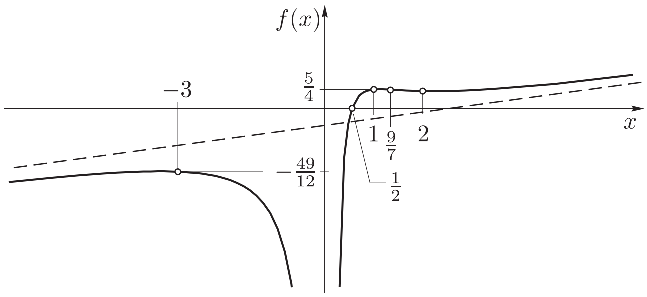
- Intervali stroge monotonosti: tri stacionarne točke in pol delijo interval na pet območij, tj. $\mathcal{I}_1 = (-\infty, -3)$, $\mathcal{I}_2 = (-3, 0)$, $\mathcal{I}_3 = (0, 1)$, $\mathcal{I}_4 = (1, 2)$, $\mathcal{I}_5 = (2, \infty)$. f raste, ko $f'(x) > 0 = \frac{x^3-7x+6}{2x^3} > 0$, tj. ko je $x \in (\mathcal{I}_1 \cup \mathcal{I}_3 \cup \mathcal{I}_5)$. Podobno, f pada, ko je $x \in (\mathcal{I}_2 \cup \mathcal{I}_4)$.

- Drugi odvod: $f''(x) = -\frac{9}{x^4} + \frac{7}{x^3} = \frac{7x-9}{x^4}$.

- Lokalni ekstremi: za $x_1 = -3$ je $f''(-3) = -10/27$, za $x_2 = 1$ je $f''(1) = -2$, za $x_3 = 2$ je $f''(1) = 5/16$. V $x_1 = -3$ in $x_2 = 1$ ima f lokalni maksimum, v $x_3 = 2$ pa lokalni minimum.

- Kandidati za prevoj: f je dvakrat odvedljiva povsod, razen v $x = 0$. V $x = 9/7$ je $f''(x) = 0$.

- Intervali konveksnosti in konkavnosti: $f''(x) > 0$ za $x > 9/7$ in $f''(x) < 0$ za $x < 9/7$. Na intervalih $(-\infty, 0)$, $(0, 9/7)$ je f konkavna, na $(9/7, \infty)$ pa konveksna. f'' spremeni predznak v $x = 9/7$. V tej točki ima f prevoj. $f(9/7) = 913/756$.



Slika 4.10: Graf funkcije f

- Zaloga vrednosti: $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

$\Diamond$

4.8 L'Hospitalovi pravili

L'Hospitalovi pravili uporabljamo za izračun limit oblike $\lim f(x)/g(x)$, v primerih, ko je $\lim f(x) = 0$ in $\lim g(x) = 0$ ter primerih, ko je $\lim f(x) = \infty$ in $\lim g(x) = \infty$. Pravimo, da je takšna limita nedoločene oblike „0/0" oz. „∞/∞". Možno je izračunati tudi limite nedoločenih oblik: „$\infty-\infty$", „$0\cdot\infty$",...

Izrek 42 (Cauchy) *Naj bosta f in g zvezni na $[a, b]$, odvedljivi na (a, b) in naj bo $g'(x) \neq 0$ za vsak $x \in (a, b)$. Tedaj obstaja takšna točka $c \in (a, b)$, da je*

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Dokaz: Najprej dokažemo, da je $g(b) - g(a) \neq 0$ (da lahko delimo). Iz Lagrangeevega izreka sledi, da obstaja $\xi \in (a, b)$, da je $g(b) - g(a) = g'(\xi)(b - a) \neq 0$ (po predpostavki). Definirajmo:

$$F(x) := f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}\big(g(x) - g(a)\big)$$

Lastnosti funkcije F so: F je zvezna na $[a, b]$, F je odvedljiva na (a, b) in $F(a) = F(b) = 0$. Funkcija F zadošča pogojem Rolleovega izreka. Torej obstaja $c \in (a, b)$, da je $F'(c) = 0$.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(x).$$

Iz pogoja $F'(c) = 0$ dobimo

$$F'(c) = f'(c) - \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} g'(c) = 0$$

oziroma

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}.$$

$\square$

Izrek 43 *Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a, b). Naj bo $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vse $x \in (a, b)$. Naj bo*

$$\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0$$

in

$$\lim_{x \downarrow a} g(x) = 0.$$

Če obstaja

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

in obe limiti sta enaki, torej

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: Ker $\lim_{x \downarrow a} f(x) = 0$ in $\lim_{x \downarrow a} g(x) = 0$, lahko funkciji f in g razširimo do zveznih funkcij na $[a, b)$ tako, da postavimo $f(a) = 0$ in $g(a) = 0$. Naj bo $x \in (a, b)$. Uporabimo izrek 42 za interval $[a, x]$. Torej obstaja za vsak $x \in (a, b)$ takšen $c_x \in (a, x)$, da je

$$\frac{f'(c_x)}{g'(c_x)} = \frac{f(x) - f(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{f(x)}{g(x)}.$$

Denimo, da obstaja $\lim_{x\downarrow a} g'(x)/f'(x) = L$. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da iz $a < x < a+\delta$ sledi

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - L\right| < \varepsilon.$$

Ker je $a < x < a+\delta$, je $a < c_x < x < a+\delta$. Torej velja tudi

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - L\right| < \varepsilon,$$

za vsak $a < x < a+\delta$. Torej je $\lim_{x\downarrow a} f(x)/g(x) = L$. $\square$

Zgled:

1.
$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - \cos x}{x + \sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x + \sin x}{1 + \cos x} = \frac{1}{2}$$

2.
$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0} \frac{1 + x - e^x}{1 - \cos x} &= \lim_{x\to 0} \frac{1 - e^x}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0} \frac{-e^x}{\cos x}\\ &= -1\end{aligned}$$

$\Diamond$

Izrek 44 *Naj bosta f in g odvedljivi funkciji na (a,b). Naj bo $g(x) \neq 0$ in $g'(x) \neq 0$ za vse x, $x \in (a,b)$. Naj bo*

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = \infty$$

in

$$\lim_{x\downarrow a} g(x) = \infty.$$

Če obstaja

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$$

in limiti sta enaki, torej

$$\lim_{x\downarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\downarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: Naj bo $L = \lim_{x \downarrow a} f'(x)/g'(x)$. Naj bo $L < r < q$. Obstaja c, $c \in (a, b)$, da je

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} < r, \quad \text{za} \quad a < x < c.$$

Naj bo $a < x < y < c$. Po izreku 42 obstaja ξ, $x < \xi < y$, da je

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x) - g(y)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < r.$$

Fiksirajmo y. Obstaja c_1, $a < c_1 < y$, da je $g(x) > g(y)$ in $g(x) > 0$ za $a < x < c_1$. Pomnožimo zgornjo enačbo z $\big(g(x) - g(y)\big)/g(x)$. Sledi

$$\frac{f(x) - f(y)}{g(x)} < r\frac{g(x) - g(y)}{g(x)}, \quad a < x < c_1,$$

tj.

$$\frac{f(x)}{g(x)} < r - r\frac{g(y)}{g(x)} + \frac{f(y)}{g(x)}, \quad a < x < c_1.$$

Ker gre $g(x) \to +\infty$ pri $x \to a$, obstaja c_2, $a < c_2 < c_1$, da je

$$\frac{f(x)}{g(x)} < q, \quad a < x < c_2.$$

Torej, za vsak $q > L$ smo našli c_2, da je $f(x)/g(x) < q$, $a < x < c_2$. Podobno za vsak $p < L$ najdemo c_3, da je $f(x)/g(x) > p$, $a < x < c_3$. Iz obeh trditev sledi dokaz. $\square$

Posledica 25 *Naj bosta f, g, odvedljivi funkciji na (A, ∞), $g(x) \neq 0$, $g'(x) \neq 0$, $A < x < \infty$. Naj bo*

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = 0$$

in

$$\lim_{x \to \infty} g(x) = 0.$$

Če obstaja

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)},$$

potem obstaja tudi limita

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$$

in limiti sta enaki, torej

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Dokaz: Predpostavimo lahko, da je $A > 0$. Naj bo $F(t) = f(1/t)$, $G(t) = g(1/t)$ in $0 < t < 1/A$. Tedaj sta F, G odvedljivi funkciji na $(0, 1/A)$, ki zadoščata pogojem izreka 42. Ker je

$$\frac{F'(t)}{G'(t)} = \frac{f'(1/t)(-1/t^2)}{g'(1/t)(-1/t^2)} = \frac{f'(1/t)}{g'(1/t)}$$

in

$$\frac{F(t)}{G(t)} = \frac{f(1/t)}{g(1/t)}.$$

Ker $1/t \to \infty \Leftrightarrow t \to 0$, posledica sledi iz izreka 43. $\square$

Zgled:

1.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{2x^2+3}{4x^2+x+1} &= \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{8x+1} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{4}{8} \\ &= \frac{1}{2}\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}\lim_{x\downarrow 0} x \log x &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\log x}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} \\ &= \lim_{x\downarrow 0} -x \\ &= 0\end{aligned}$$

3.

$$\lim_{x\downarrow 0} x^x = L$$

$$\log(\lim_{x\downarrow 0} x^x) = \log L$$

$$\lim_{x\downarrow 0} \log(x^x) = \lim_{x\downarrow 0} x \log x = 0$$

Torej $L = 1$ oz. $\lim_{x\downarrow 0} x^x = 1$.

$\diamondsuit$

Zgled: Izračunaj limito

$$\ell = \lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)^3 - 6 + 12x^{-1}}{\sin^3(\pi x)}.$$

Z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo:

$$\begin{aligned}\ell &= \lim_{x\to 2} \frac{\log(x-1)^2(x-1)^{-1} - 4x^{-2}}{\pi \sin^2(\pi x)\cos(\pi x)} \\ &= -\infty.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Zgled: Izračunaj limito

$$\lim_{x\to\infty} x^2 \left(e^{-x^{-2}} - 1\right).$$

Z uporabo L'Hospitalovega pravila dobimo:

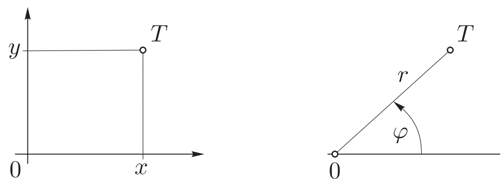
$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^{-2}} - 1}{x^{-2}} &= \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^{-2}} 2x^{-3}}{-2x^{-3}} \\ &= \lim_{x\to\infty} -e^{-x^{-2}} \\ &= -1.\end{aligned}$$

$\diamondsuit$

4.9 Uporaba odvoda v geometriji v ravnini

4.9.1 Kartezične koordinate, polarne koordinate

V kartezičnem koordinatnem sistemu vsaki točki v ravnini priredimo urejen par števil (x, y). V polarnem koordinatnem sistemu vsaki točki (razen izhodišču) priredimo urejen par števil (r, φ).



Slika 4.11: Kartezični in polarni koordinatni sistem

Polarni koordinatni sistem definiramo tako, da izberemo točko O (pol) in poltrak z začetkom v O (polarna os), slika 4.11. Nato izberemo še smer vrtenja. Vsaki točki T v ravnini priredimo dve števili r in φ. Pri tem je r oddaljenost točke od O, φ pa kot, ki ga daljica $\overline{OT}$ oklepa s polarno osjo. Če je $r > 0$, je φ natanko določen, če zahtevamo $0 \leq \varphi < 2\pi$, sicer je določen le do mnogokratnika $k \cdot 2\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Za točko O kot φ ni določen.

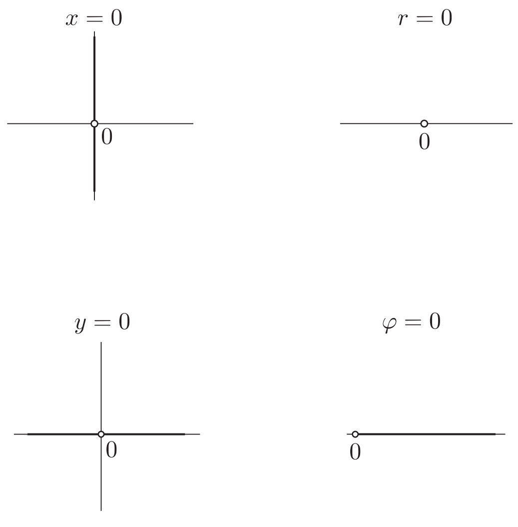
Obratno: Vsak (urejen) par (r, φ), kjer je $r > 0$ in $0 \leq \varphi < 2\pi$, natanko določa točko v ravnini.

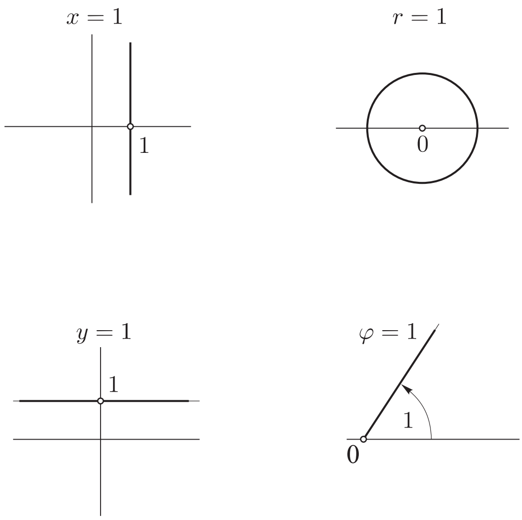
Oglejmo si še zvezo med kartezičnimi in polarnimi koordinatami. Običajno velja, da je polarna os pozitivna x-os, smer kroženja pa je določena od pozitivne x-osi proti pozitivni y-osi. Če par (x, y) v kartezičnih koordinatah in par (r, φ) v polarnih koordiantah predstavljata isto točko, je

$$x = r \cos \varphi$$
$$y = r \sin \varphi.$$

Seveda je $r^2 = x^2 + y^2$ in, če $x \neq 0$, tudi $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$.

Zgled: Množice točk v ravnini za oba koordinatna sistema.





◊

4.9.2 Krivulje v ravnini

Krivulje v ravnini lahko podajamo na več načinov.

Eksplicitno podane krivulje

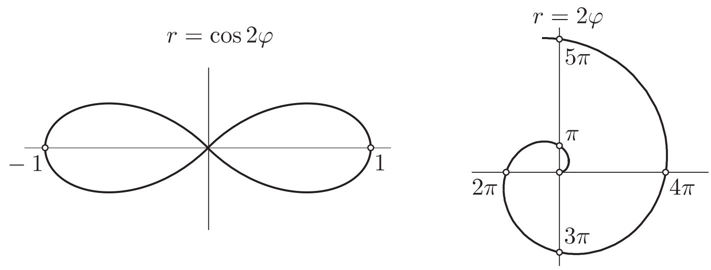
Takšna krivulja je dana kot graf neke zvezne funkcije. Npr. $f : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ na intervalu $\mathcal{I}$.

$$\Gamma_f = \{(x, y) : x \in \mathcal{I}, y = f(x)\}.$$

V tem primeru pravimo, da je krivulja podana eksplicitno z enačbo $y = f(x)$, $x \in \mathcal{I}$.

Tudi v polarnih koordiantah r, φ lahko podamo krivuljo eksplicitno, npr. kot $\{(r, \varphi) : r = f(\varphi), \varphi \in \mathcal{I}\}$, torej z enačbo $r = f(\varphi)$, $\varphi \in \mathcal{I}$.

Zgled:



◊

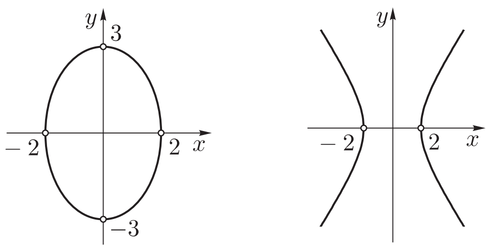
Implicitno podane krivulje

Implicitno podana krivulja je podana z enačbo: $F(x,y)=0$, kjer je F dovolj lepa funkcija, torej kot množica

$$\{(x,y) : F(x,y)=0\}.$$

Zgled:

$$F(x,y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} - 1 \qquad F(x,y) = \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{9} - 1$$



◊

Parametrično podane krivulje

Ogledali si bomo ***parametrično podajanje krivulj*** v kartezičnem koordinatnem sistemu. $x=f(t)$, $y=g(t)$, $t\in[\alpha,\beta]$. Predstavljamo si, da se točka $\big(f(t),g(t)\big)$ s časom t giblje v ravnini. Matematično gledano je gibanje v ravnini opisano s preslikavo $F:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}^2$, in lega točke v trenutku t je $F(t)\in\mathbb{R}^2$, $F(t)=\big(f(t),g(t)\big)$.

Definicija 75 (Poti) ***Pot v ravnini*** $\mathbb{R}^2$ *je zvezna preslikava* $F : \mathcal{I} \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$*, kjer je* $\mathcal{I}$ *interval. Takšna preslikava je podana s parom zveznih funkcij* $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}$ *oz. z enačbama* $x = f(t)$*,* $y = g(t)$*,* $t \in \mathcal{I}$*.*

$$F(t) = (f(t), g(t)), \quad t \in \mathcal{I}$$

Tir (sled) poti F *je njena zaloga vrednosti* $F(\mathcal{I}) = \{(f(t), g(t)) : t \in \mathcal{I}\}$*. Spremenljivko* $t \in \mathcal{I}$ *imenujemo* ***parameter.***

Opomba: $\mathcal{I}$ se imenuje ***parametrski interval***. Po njem teče parameter t. Pogosto odvode po parametru označujemo s piko ($\dot{x} = x'$).

Pot je torej preslikava, predstavlja gibanje, tir pa je množica v ravnini, ki jo točka opiše pri tem gibanju.

Pri lepih funkcijah f in g (npr. zvezno odvedljivih) je tir poti F res krivulja. V tem primeru imenujemo $x = f(t)$, $y = g(t)$ parametrični enačbi krivulje. V našem primeru bo krivulja tir poti, t pa parameter. Če f in g nista dovolj lepi (sta samo zvezni), tir poti F ni nujno krivulja. Obstajajo poti, katerih tir je npr. kvadrat v ravnini (Peanove krivulje).

Omenimo, da ima veliko različnih poti isti tir, tj. isto množico je možno na veliko načinov opisati s točko, ki se giblje.

Zgled:

1. ***Krožnica*** v implicitni obliki:

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad a > 0$$

Krožnica v parametrični obliki:

$$t \in [0, 2\pi]$$

$$x = a \cos t$$

$$y = a \sin t$$

Krožnice ne moremo zapisati kot graf funkcije. Lahko pa jo zapišemo kot unijo grafov dveh funkcij, tj. zgornja + spodnja polkrožnica.

2. ***Elipsa*** v implicitni obliki:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

Elipsa v parametrični obliki:

$$t \in [0, 2\pi]$$
$$x = a\cos t$$
$$y = b\sin t$$

3. ***Hiperbola*** v implicitni obliki:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b > 0$$

Hiperbola v parametrični obliki:

$$\left.\begin{aligned} x &= a\cosh t \\ y &= b\sinh t \end{aligned}\right\} \text{desna veja}$$

$$\left.\begin{aligned} x &= -a\cosh t \\ y &= b\sinh t \end{aligned}\right\} \text{leva veja}$$

4. ***Cikloida*** v parametrični obliki:

$$x = a(t - \sin t)$$

$$y = a(1 - \cos t)$$

Cikloida je tir, ki ga pri kotaljenju opiše točka na obodu kroga.

◊

Zgled: Nariši krivuljo, ki je podana z enačbama

$$x(t) = t^3 - t$$
$$y(t) = 3t^4 - 4t^2 + 1.$$

Poiščemo ničle $x(t) = 0$.

$$\begin{aligned} x(t) &= t^3 - t \\ &= t(t-1)(t+1) \end{aligned}$$

Ničle $x(t) = 0$ najdemo pri $t_1 = -1$, $t_2 = 0$ in $t_3 = 1$. Izračunamo odvod $\dot{x}(t)$.

$$\dot{x}(t) = 3t^2 - 1$$

Poiščemo ničle $y(t) = 0$.

$$\begin{aligned} y(t) &= 3t^4 - 4t^2 + 1 \\ &= 3s^2 - 4s + 1, \quad s = t^2 \end{aligned}$$

Rešitvi enačbe $3s^2 - 4s + 1 = 0$ sta $s_1 = 1$ in $s_2 = 1/3$. Od tod sledi $t_4 = -1$, $t_5 = -\sqrt{3}/3$, $t_6 = \sqrt{3}/3$ in $t_7 = 1$. Izračunamo odvod $\dot{y}(t)$.

$$\dot{y}(t) = 12t^3 - 8t$$

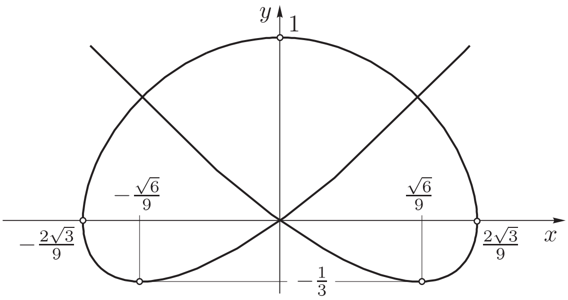
V koordinatnem sistemu x-y poiščemo vodoravne in navpične tangente na graf.

$$\begin{aligned} y'(x) &= \frac{\dot{y}(t)}{\dot{x}(t)} \\ &= \frac{12t^3 - 8t}{3t^2 - 1} \end{aligned}$$

Tangenta je vodoravna, ko je $y'(x) = 0$, tj. $12t^3 - 8t = 0$, pri $t_8 = -\sqrt{6}/3$, $t_9 = 0$ in $t_{10} = \sqrt{6}/3$, in navpična, ko je $y'(x) = \infty$, tj. $3t^2 - 1 = 0$, pri $t_{11} = -\sqrt{3}/3$ in $t_{12} = \sqrt{3}/3$. Zaradi večje preglednosti zapišemo dobljene rezultate v tabelo.

Tabela 4.2: Vrednosti za $\dot{x}(t)$, $x(t)$, $\dot{y}(t)$, $y(t)$

t	$-\infty$	-1	$-\sqrt{6}/3$	$-\sqrt{3}/3$	0	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{6}/3$	1	∞
$\dot{x}$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$	$+$
x	$-\infty$	0	$\sqrt{6}/9$	$2\sqrt{3}/9$	0	$-2\sqrt{3}/9$	$-\sqrt{6}/9$	0	∞
$\dot{y}$	$-$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$
y	∞	0	$-1/3$	0	1	0	$-1/3$	0	∞



Slika 4.12: Slika parametrično podane krivulje

◊

Zgled: Nariši krivuljo, ki je podana z enačbo

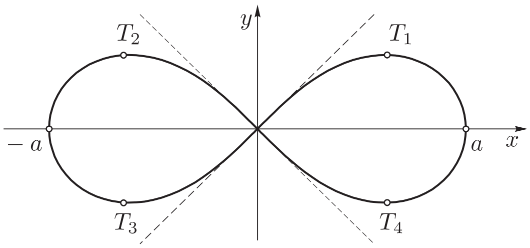
$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2).$$

Vpeljemo polarne koordinate. Zvezo med kartezičnimi in polarnimi koordinatami $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ vstavimo v zgornjo enačbo. Enačba krivulje je tako:

$$\begin{gathered}
(r^2\cos^2\varphi + r^2\sin^2\varphi)^2 = a^2(r^2\cos^2\varphi - r^2\sin^2\varphi) \\
r^4 = a^2r^2\cos 2\varphi \\
r^2 = a^2\cos 2\varphi.
\end{gathered}$$

Zgornja enakost je definirana samo v primeru, ko je $\cos 2\varphi \geq 0$. Iz tega sledi

$$\begin{gathered}
-\frac{\pi}{2} + 2k\pi \leq 2\varphi \leq \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad k \in \{0, 1\} \\
-\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}, \\
-\frac{\pi}{4} + \pi \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4} + \pi.
\end{gathered}$$



Slika 4.13: Slika parametrično podane krivulje

V našem primeru najdemo ekstrem povsod, kjer je $y'(\varphi) = 0$.

$$\begin{aligned} y'(\varphi) &= (r\sin\varphi)' \\ &= (a\sqrt{\cos 2\varphi}\sin\varphi)' \\ &= a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - a\frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} \end{aligned}$$

Torej

$$a\cos\varphi\sqrt{\cos 2\varphi} - a\frac{\sin\varphi\sin 2\varphi}{\sqrt{\cos 2\varphi}} = 0$$

$$\cos\varphi\cos 2\varphi - \sin\varphi\sin 2\varphi = 0$$

$$\cos\varphi(\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) - \sin\varphi\cdot 2\sin\varphi\cos\varphi = 0$$

$$\cos^2\varphi - 3\sin^2\varphi = 0$$

$$\operatorname{tg}^2\varphi = \frac{1}{3} \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\pi}{6}.$$

Sledi:

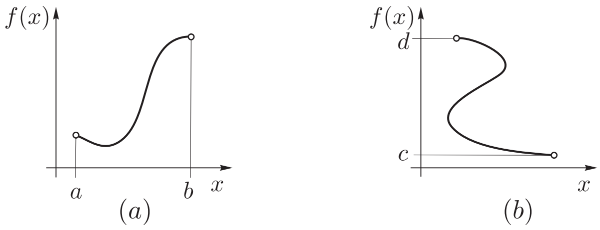
$$\begin{aligned} r &= a\sqrt{\cos 2\varphi} \\ &= a\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} x &= r\cos\varphi \\ &= a\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}\cos\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{3}{2}} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} y &= r\sin\varphi \\ &= a\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}}\sin\frac{\pi}{6} \\ &= \frac{a}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Ekstremi:

$$\begin{aligned} \text{max}: \quad & T_1 = (x, y) \qquad & \text{min}: \quad & T_3 = (-x, -y) \\ & T_2 = (-x, y) & & T_4 = (x, -y). \end{aligned}$$

◊

Nismo še natančno povedali, kaj krivulja sploh je. Definirali bomo gladke krivulje.



Slika 4.14: Gladke krivulje

Gladke krivulje bodo take, ki so lokalno oblike (a) ali (b).

Definicija 76 *Tir poti $F = (f, g) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$, kjer sta f in g takšni zvezno odvedljivi funkciji na $\mathcal{I}$, da je $\dot{f}^2(t) + \dot{g}^2(t) \neq 0$ za vsak $t \in \mathcal{I}$, bomo imenovali* ***gladka krivulja****. (Po njej lahko potujemo, ne da bi se ustavili.)*

Opomba: Gladka krivulja lahko seka sama sebe.

Trditev 30 *Naj bo $F : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ parametrizacija gladke krivulje.*

$$F(t) = \big(f(t), g(t)\big)$$

$$\dot{f}^2(t) + \dot{g}^2(t) \neq 0$$

Naj bo $t_0 \in \mathcal{I}$, potem obstaja takšna okolica $\mathcal{J}_0$ točke $t_0 \in \mathcal{I}$, da je krivulja $F(\mathcal{J}_0)$ graf neke zvezno odvedljive funkcije nad x-osjo ali y-osjo.

Dokaz: Naj bo $t_0 \in \mathcal{I}$. Vemo $\dot{f}^2(t_0) + \dot{g}^2(t_0) \neq 0$. Torej vsaj eno od števil $\dot{f}(t_0)$, $\dot{g}(t_0)$ je različno od 0. Brez izgube splošnosti lahko rečemo $\dot{f}(t_0) \neq 0$. Ker je f zvezno odvedljiva funkcija na $\mathcal{I}$, je $\dot{f}$ zvezna na $\mathcal{I}$. Torej obstaja okolica $\mathcal{J}_0$ točke t_0 na $\mathcal{I}$, da je $\dot{f}(t_0) \neq 0$ na $\mathcal{J}_0$. Brez izgube splošnosti lahko rečemo $\dot{f}(t_0) > 0$ na $\mathcal{J}_0$. Torej je f strogo naraščajoča na $\mathcal{J}_0$. $f : \mathcal{J}_0 \to f(\mathcal{J}_0)$ je bijekcija. Torej obstaja inverzna funkcija $\varphi : f(\mathcal{J}_0) \to \mathcal{J}_0$. Ker je f odvedljiva in njen odvod ni enak 0, je φ odvedljiva na intervalu $f(\mathcal{J}_0)$. Ker je $\dot{\varphi}(s) = 1/f'\big(\varphi(s)\big)$, je $\dot{\varphi}$ zvezna na $f(\mathcal{J}_0)$, kar pomeni, da je φ zvezno odvedljiva na $f(\mathcal{J}_0)$. Definirajmo preslikavo

$$
\begin{aligned}
s \in f(\mathcal{J}_0) &\mapsto (F \circ \varphi)(s) \\
(F \circ \varphi)(s) &= \Big(f\big(\varphi(s)\big), g\big(\varphi(s)\big)\Big) \\
&= \big(s, \Phi(s)\big),
\end{aligned}
$$

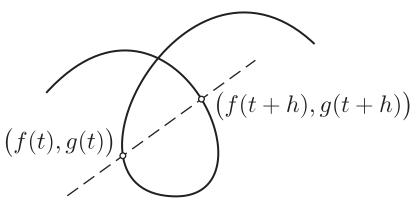
kjer je $\Phi = g \circ \varphi$. Torej je

$$F(\mathcal{J}_0) = (F \circ \varphi)\big(f(\mathcal{J}_0)\big)$$

in $\big\{\big(s, \Phi(s)\big) : s \in f(\mathcal{J}_0)\big\}$ graf funkcije Φ. □

Tangenta in normala krivulje

Naj bo $F = (f, g) : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$ ***gladka pot***, torej naj bosta f, g zvezno odvedljivi na $\mathcal{I}$. Naj bo $t \in \mathcal{I}$ in vsaj eden od odvodov $\dot{f}(t)$, $\dot{g}(t)$ različen od 0, npr. $\dot{f}(t) \neq 0$. Torej na intervalu $(t - \delta, t + \delta)$ funkcija f strogo narašča ali pada, torej $f(t + h) \neq f(t)$, $|h| < \delta$.



Slika 4.15: Sekanta skozi točki $\big(f(t), g(t)\big)$ in $\big(f(t + h), g(t + h)\big)$

Enačba sekante skozi točki $\big(f(t), g(t)\big)$ in $\big(f(t + h), g(t + h)\big)$ je

$$\big(Y - g(t)\big)\big(f(t + h) - f(t)\big) = \big(X - f(t)\big)\big(g(t + h) - g(t)\big).$$

To enačbo delimo s h in dobimo

$$\big(Y - g(t)\big)\frac{f(t + h) - f(t)}{h} = \big(X - f(t)\big)\frac{g(t + h) - g(t)}{h}.$$

Naredimo limito leve in desne strani, ko gre $h \to 0$ in dobimo:

$$\dot{f}(t)\big(Y - g(t)\big) = \dot{g}(t)\big(X - f(t)\big).$$

To je enačba ***tangente na krivuljo*** v točki $\big(f(t), g(t)\big)$. Podobno sklepamo v primeru, ko je $\dot{g}(t) \neq 0$ in pridemo do iste enačbe.

Normala na krivuljo v točki $\big(f(t), g(t)\big)$ je premica skozi točko $\big(f(t), g(t)\big)$, ki je pravokotna na tangento v tej točki, torej je podana z enačbo

$$\dot{g}(t)\big(Y - g(t)\big) = -\dot{f}(t)\big(X - f(t)\big).$$

Smerni vektor tangente $\big(\dot{f}(t), \dot{g}(t)\big)$ in smerni vektor normale $\big(\dot{g}(t), -\dot{f}(t)\big)$ sta namreč pravokotna.

Definicija 77 *Naj bosta f in g odvedljivi in t takšen, da je vsaj eden od $\dot{f}(t)$, $\dot{g}(t)$ različen od* 0. *Tedaj je tangenta na tir poti $F = (f, g)$ v točki $F(t)$ premica z enačbo*

$$\big(x - f(t)\big)\dot{g}(t) = \big(y - g(t)\big)\dot{f}(t),$$

normala pa premica z enačbo

$$\big(x - f(t)\big)\dot{f}(t) + \big(y - g(t)\big)\dot{g}(t) = 0,$$

tj. premica skozi $F(t)$, ki je pravokotna na tangento.

Vektor $\big(\dot{f}(t), \dot{g}(t)\big)$ kaže v smeri tangente in je vektor hitrosti pri gibanju v trenutku t. Tangenta je torej premica skozi $\big(f(t), g(t)\big)$ in smernim vektorjem $\big(\dot{f}(t), \dot{g}(t)\big)$. Tangenta je odvisna le od tira in točke, nič pa od parametrizacije, tj., kako hitro se giblje. Če bi krivuljo v okolici točke $\big(f(t), g(t)\big)$ parametrizirali drugače, in sicer tako, da bi bil spet eden od odvodov različen od 0, bi imeli

$$x = f\big(\varphi(\tau)\big),$$
$$y = g\big(\varphi(\tau)\big),$$

kjer bi bila φ odvedljiva funkcija v okolici τ_0 in $\varphi(\tau_0) = t$, $\dot{\varphi}(\tau_0) \neq 0$. Spet bi dobili za smerni vektor tangente

$$\Big(\dot{f}\big(\varphi(\tau)\big)\dot{\varphi}(\tau), \dot{g}\big(\varphi(\tau)\big)\dot{\varphi}(\tau)\Big),$$

ki je seveda kolinearen vektorju $\big(f'(t), g'(t)\big)$.

Opomba: V primerih, ko sta oba odvoda hkrati enaka 0, se lahko zgodi, da krivulja nima tangente, npr. $x = t^3$, $y = t^2$, v točki $(0,0)$ nima tangente.

Opomba: Če je krivulja dana v polarnih koordinatah $r = f(\varphi)$, vzamemo φ za parameter in funkcijo zapišemo v kartezičnih koordinatah. Glej naslednji zgled.

Zgled: Naj bo krivulja dana v polarnih koordinatah, $r = \varphi$. Določi enačbo tangente na krivuljo v točki

$$\big(\pi/3\cos(\pi/3), \pi/3\sin(\pi/3)\big) = (\pi/6, \sqrt{3}\pi/6).$$

Parametrizacija te krivulje:

$$t = \frac{\pi}{3},$$
$$x(t) = t\cos t,$$
$$y(t) = t\sin t.$$

Odvoda x in y po parametru t sta:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= \cos t - t\sin t \\ &= \frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\dot{y} &= \sin t - t\cos t \\ &= \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

Vse to vstavimo v enačbo tangente na krivuljo, dobimo:

$$\left(\frac{1}{2} - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(y - \frac{\pi}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\pi}{3}\frac{1}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{3}\frac{1}{2}\right),$$
$$9y + 2\pi^2 = 9\sqrt{3}x + 3\pi\left(x + \sqrt{3}y\right),$$
$$y = \frac{-3\pi x - 9\sqrt{3}x + 2\pi^2}{3\left(-3 + \sqrt{3}\pi\right)}.$$

◊

Poglavje 5

Integral

Naj bo funkcija f odvedljiva na intervalu $\mathcal{I}$. Tedaj je tudi f' funkcija, definirana na intervalu $\mathcal{I}$. Denimo, da f' poznamo. Kako priti do funkcije f? Ali je vsaka funkcija na $\mathcal{I}$ odvod kakšne funkcije?

5.1 Nedoločeni integral ali primitivna funkcija

Definicija 78 *Funkcija F, definirana na intervalu $\mathcal{I}$, se imenuje **primitivna funkcija** ali **nedoločeni integral** funkcije f, če je na $\mathcal{I}$ funkcija f enaka odvodu funkcije F; torej če velja*

$$F'(x) = f(x) \quad \textit{za vsak } x \in \mathcal{I}.$$

Zgled: Naj bo $f(x) = x$ in $F(x) = \frac{1}{2}x^2$. Funkcija F je nedoločeni integral funkcije f. ♢

Ob tem se vprašamo: Katere funkcije f na $\mathcal{I}$ imajo primitivne funkcije? Koliko primitivnih funkcij ima lahko dana funkcija f?

Zgled: Naj bo funkcija f dana s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 1, & -1 \le x \le 0, \\ -1, & 0 < x \le 1. \end{cases}$$

Denimo, da je F njena primitivna funkcija, torej $F'(x) = f(x)$ za vsak $x \in (-1,1)$. Funkcija F je zvezna na $[-a,a]$ za vsak a, $0 < a < 1$. Zato doseže v c, $-a \leq c \leq a$, svoj maksimum na $[-a,a]$. Ker je $f(-a) = F'(-a) = 1$, F v točki $-a$ narašča. Podobno, F v točki $+a$ pada. Torej je c notranja točka. Tako obstaja c, $-1 < c < 1$, da je $F'(c) = 0$, tj. $f(c) = 0$, protislovje. Torej f nima primitivne funkcije. $\diamondsuit$

Opomba: V zgornjem zgledu f ni bila zvezna. Kasneje bomo dokazali, da ima vsaka zvezna funkcija primitivno funkcijo.

Izrek 45 *Naj bo F primitivna funkcija funkcije f na intervalu $\mathcal{I}$. Tedaj je za vsako konstanto C tudi funkcija G,*

$$G(x) = F(x) + C, \quad x \in \mathcal{I}$$

primitivna funkcija funkcije f.

Naj bo H poljubna primitivna funkcija funkcije f. Tedaj obstaja taka konstanta D, da je

$$H(x) = F(x) + D.$$

Dokaz: $G'(x) = (F(x) + C)' = F'(x) + C' = F'(x) = f(x)$. G je primitivna funkcija. Naj bo H primitivna funkcija funkcije f, tj. $H'(x) = f(x)\big(= F'(x)\big)$. Definirajmo funkcijo $K(x) = H(x) - F(x)$. Sledi: $K'(x) = H'(x) - F'(x) = 0$ na $\mathcal{I}$, torej je K konstantna, torej $K(x) \equiv D$. Torej $H(x) = F(x) + D$ za vse $x \in \mathcal{I}$. $\square$

Oznaka: Če je F primitivna funkcija funkcije f, je diferencial

$$dF(x) = F'(x)dx$$

oziroma

$$dF(x) = f(x)dx$$

Zato pišemo tudi

$$F(x) = \int f(x)dx.$$

Pozneje, ko bomo v integriranje uvedli novo spremenljivko, bomo videli, da je takšen zapis zelo pripraven. F je torej funkcija, katere diferencial je $f(x)dx$. Integriranje je torej nasprotna operacija diferenciaranju.

5.1.1 Nedoločeni integral elementarnih funkcij

V tabeli 5.1 je navedenih nekaj elementarnih funkcij in njihovih nedoločenih integralov.

5.1.2 Pravila za integriranje

Ker je integriranje nasprotna operacija odvajanju, pravila za integriranje sledijo iz pravil za odvajanje.

1. $$\int \big(f(x) + g(x)\big)dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$$

2. $$\int (\lambda f)(x)dx = \lambda \int f(x)dx, \qquad \lambda \text{ je konstanta}$$

3. $$\int (\lambda f + \mu g)(x)dx = \lambda \int f(x)dx + \mu \int g(x)dx, \qquad \lambda, \mu \text{ sta konstanti}$$

4. ***Integracija po delih (per partes)*** Če sta f in g odvedljivi funkciji, velja
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx$$
ali krajše
$$\int udv = uv - \int vdu.$$
Dokaz: Iz formule za odvod produkta
$$\big(f(x)g(x)\big)' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
sledi
$$\begin{aligned} f(x)g(x) &= \int \big(f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\big)dx \\ &= \int f'(x)g(x)dx + \int f(x)g'(x)dx, \end{aligned}$$
torej
$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f'(x)dx.$$
□

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral
$$\int xe^x dx.$$

Vzemimo

$$\begin{aligned} u &= x, \quad dv = e^x dx \\ du &= dx, \quad v = e^x. \end{aligned}$$

Po zgornji formuli sledi

$$\begin{aligned} \int xe^x dx &= xe^x - \int e^x dx \\ &= xe^x - e^x + C \\ &= e^x(x-1) + C. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

5. Uvedba nove spremenljivke. Naj bo F primitivna funkcija funkcije f in φ takšna odvedljiva funkcija, da je $F \circ \varphi$ definirana. Tedaj je

$$\begin{aligned} (F \circ \varphi)'(t) &= F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) \\ &= f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t), \end{aligned}$$

torej

$$F\big(\varphi(t)\big) + C = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

To formulo uporabimo takole: Dana je funkcija f. Denimo, da poznamo

$$G(t) = \int f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt,$$

kjer je φ obrnljiva funkcija. Potem velja:

$$F(x) = G\big(\varphi^{-1}(x)\big).$$

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t^2 = x^2 - a^2$. Pri tem $x^2 = t^2 + a^2$, $dx = tx^{-1}dt$. Dobimo

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - a^2}} &= \int \frac{dt}{t^2 + a^2} \\ &= \frac{1}{a^2} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{a}\right)^2 + 1} \end{aligned}$$

Še enkrat vpeljemo novo spremenljivko, $s = ta^{-1}$. Pri tem $ds = a^{-1}dt$. Od tod sledi

$$\begin{aligned}\frac{1}{a^2}\int \frac{dt}{\left(\frac{t}{a}\right)^2+1} &= \frac{1}{a}\int \frac{ds}{s^2+1}\\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg} s + C\\ &= \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{a}\sqrt{x^2-a^2}\right)+C.\end{aligned}$$

Isti integral lahko rešimo tudi s substitucijo $x = t^{-1}$. Pri tem $dx = -t^{-2}dt$. Sledi

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2-a^2}} = -\int \frac{dt}{\sqrt{1-(at)^2}}.$$

Še enkrat vpeljemo novo spremenljivko $s = at$. Pri tem $ds = adt$. Dobimo

$$\begin{aligned}-\int \frac{dt}{\sqrt{1-(at)^2}} &= -\frac{1}{a}\int \frac{ds}{\sqrt{1-s^2}}\\ &= -\frac{1}{a}\arcsin s + \tilde{C}\\ &= -\frac{1}{a}\arcsin \frac{a}{x} + \tilde{C}.\end{aligned}$$

Opomba: Pri uvajanju nove spremenljivke na oba načina dobimo na videz povsem različna rezultata, vendar imata obe primitivni funkciji enaka odvoda, zato se rezultata razlikujeta samo za aditivno konstanto. $\Diamond$

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{\log x}{x}dx.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $t = \log x$. Pri tem $x = e^t$, $dx = e^t dt$. Torej

$$\begin{aligned}\int \frac{\log x}{x}dx &= \int \frac{t}{e^t}e^t dt\\ &= \int tdt\\ &= \frac{t^2}{2}+C\\ &= \frac{\log^2 x}{2}+C\end{aligned}$$

$\Diamond$

5.1.3 Metode za računanje nekaterih nedoločenih integralov

Integral racionalne funkcije

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx, \qquad P(x), Q(x) \text{ polinoma z realnimi koeficienti}$$

$i)$ če je st $\big(P(x)\big) \geq$ st $\big(Q(x)\big)$, ju delimo in dobimo

$$P(x) = R(x)Q(x) + T(x)$$

oziroma

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \frac{T(x)}{Q(x)},$$

pri čemer je st $\big(T(x)\big) <$ st $\big(Q(x)\big)$. Naprej sledi:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)}dx = \int R(x)dx + \int \frac{T(x)}{Q(x)}dx.$$

$ii)$ poiščemo vse ničle polinoma $Q(x)$.

- polinom $Q(x)$ ima vse ničle realne

$$Q(x) = a(x-x_1)^{k_1}(x-x_2)^{k_2}\dots(x-x_n)^{k_n}$$

Potem lahko izraz $T(x)/Q(x)$ zapišemo:

$$\frac{T(x)}{Q(x)} = \frac{A_1^1}{x-x_1} + \frac{A_2^1}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{k_1}^1}{(x-x_1)^{k_1}} + \\ + \frac{A_1^2}{(x-x_2)} + \frac{A_2^2}{(x-x_2)^2} + \dots, \quad A_j^i \text{ so realna števila}$$

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)}dx.$$

Razdelimo integrand na parcialne ulomke.

$$\frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} + \frac{C}{x-2}$$

Iz enačbe

$$4x+1 = A(x+1)(x-2) + B(x-2) + C(x+1)^2$$

dobimo s primerjavo koeficientov pri x^2, x in konstanti: $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Od tod

$$\begin{aligned}
\int \frac{4x+1}{(x+1)^2(x-2)}dx &= \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int \frac{1}{x-2}dx \\
&= -\log|x+1| - \frac{1}{x+1} + \log|x-2| + C \\
&= -\frac{1}{x+1} + \log\left|\frac{x-2}{x+1}\right| + C.
\end{aligned}$$

$\Diamond$

- polinom $Q(x)$ ima tudi kompleksne ničle (ki nastopajo v konjugiranih parih). $Q(x)$ ima realne koeficiente.

$$\frac{A}{x-x_1} + \frac{B}{x-\overline{x}_1} = \frac{Cx+D}{x^2+px+q}$$

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{3x}{1+x^3}dx.$$

Razdelimo integrand na parcialne ulomke.

$$\begin{aligned}
\frac{3x}{1+x^3} &= \frac{3x}{(x+1)(x^2-x+1)} \\
&= \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-x+1}
\end{aligned}$$

Iz enačbe

$$3x = A(x^2-x+1) + (Bx+C)(x+1)$$

dobimo $A = -1$, $B = 1$, $C = 1$. Sledi:

$$\begin{aligned}
\int \frac{3x}{1+x^3}dx &= \int \frac{-1}{x+1}dx + \int \frac{x+1}{x^2-x+1}dx \\
&= -\log|x+1| + \frac{1}{2}\int \frac{2x-1}{x^2-x+1}dx + \\
&\quad + \int \frac{\frac{3}{2}}{x^2-x+1}dx \\
&= -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \\
&\quad + \frac{3}{2}\int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx \\
&\stackrel{(*)}{=} -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \\
&\quad + \frac{3}{2}\frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + D \\
&= -\log|x+1| + \frac{1}{2}\log|x^2-x+1| + \\
&\quad + \sqrt{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + D,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
(*) \qquad \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}}dx &= \frac{4}{3}\int \frac{1}{[\frac{2}{\sqrt{3}}(x-\frac{1}{2})]^2+1}dx \\
&\stackrel{(**)}{=} \frac{4}{3}\int \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{t^2+1}dt \\
&= \frac{2\sqrt{3}}{3}\operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right)\right] + D.
\end{aligned}$$

Pri tem smo v $(**)$ upoštevali:

$$t = \frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{2}\right) \quad \text{in} \quad dx = \frac{\sqrt{3}}{2}dt.$$

$\Diamond$

Integrali kotnih funkcij

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x}dx.$$

Ker v integrandu nastopajo sode potence funkcije sin in cos, vpeljemo novo spremenljivko $t = \operatorname{tg} x$.

$$\begin{aligned}
\sin^2 x + \cos^2 x &= 1 \\
\operatorname{tg}^2 x + 1 &= \frac{1}{\cos^2 x} \\
\cos^2 x &= \frac{1}{1+t^2} \\
\sin^2 x &= \frac{t^2}{1+t^2} \\
dt = \frac{1}{\cos^2 x} dx \quad &\Rightarrow \quad dx = \frac{1}{1+t^2} dt
\end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{a\sin^2 x + b\cos^2 x} dx &= \int \frac{1}{\left(a\frac{t^2}{1+t^2} + b\frac{1}{1+t^2}\right)(1+t^2)} dt \\
&= \int \frac{1}{at^2+b} dt \\
&= \frac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \operatorname{tg} x\right)}{\sqrt{a}\sqrt{b}} + C.
\end{aligned}$$

Algebraične funkcije

Zgled: Izračunajmo nedoločeni integral

$$\int \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2} dx.$$

Vpeljemo novo spremenljivko $x = t^6$. Od tod sledi $dx = 6t^5 dt$,

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{(\sqrt{x} + \sqrt[3]{x})^2} dx &= \int \frac{6t^5}{(t^3+t^2)^2} dt \\
&= \int \frac{6t}{(t+1)^2} dt.
\end{aligned}$$

Integrand razdelimo na parcialne ulomke

$$\frac{6t}{(t+1)^2} = \frac{A}{t+1} + \frac{B}{(t+1)^2} \quad \Rightarrow \quad A = 6, \;\; B = -6.$$

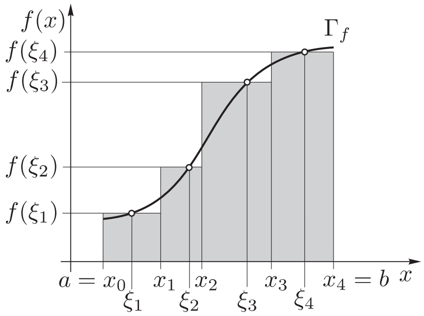
Sledi

$$\begin{aligned}
\int \frac{6t}{(t+1)^2} dt &= 6\int \frac{1}{t+1} dt - 6\int \frac{1}{(t+1)^2} dt \\
&= 6\log|\sqrt[6]{x}+1| + \frac{6}{\sqrt[6]{x}+1} + C.
\end{aligned}$$

$\Diamond$

5.2 Določeni integral

Naj bo f pozitivna zvezna funkcija na zaprtem intervalu $[a, b]$. Na pojem ***določenega integrala*** naravno pridemo, če se npr. vprašamo: kako izračunati ploščino lika, omejenega z grafom te funkcije, x-osjo in premicama $x = a$ in $x = b$?



Slika 5.1: Riemannova vsota je vsota ploščin pravokotnikov

Na x-osi izberemo delilne točke

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

tj. točke, ki razdelijo interval $[a, b]$ na n-kosov. Naj bo za vsak k, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$,

$$x_k - x_{k-1} = \delta_k$$

dolžine k-tega kosa podintervala intervala $[a, b]$. V vsakem podintervalu izberemo neko točko ξ_k, torej

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ploščina k-tega pravokotnika je enaka $f(\xi_k)\delta_k$, slika 5.1. Vsota ploščin vseh pravokotnikov pa je

$$f(\xi_1)\delta_1 + f(\xi_2)\delta_2 + \ldots + f(\xi_n)\delta_n = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k.$$

To je približek za ploščino zgoraj opisanega lika. Ploščina je enaka limiti teh približkov, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti 0 (pri tem pa seveda število delilnih točk čez vse meje). Zgornjo vsoto lahko zapišemo za vsako funkcijo, definirano na $[a, b]$. Imenujemo jo ***Riemannova vsota***. Odvisna je od delitvenih točk in izbire ξ_k.

Definicija 79 *Naj bo f definirana na $[a, b]$. Razdelimo $[a, b]$ na n-kosov,*

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b,$$

in v vsakem kosu $[x_{k-1}, x_k]$ izberimo točko ξ_k:

$$\xi_k \in [x_{k-1}, x_k], \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Izraz

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k$$

imenujemo Riemannova vsota funkcije f, prirejena delitvi $\mathcal{D} = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ in izbiri točk ξ_k. Pri tem je

$$\delta_k = x_k - x_{k-1}$$

dolžina k-tega kosa intervala $[a, b]$.

Definicija 80 *Naj bo f funkcija definirana na $[a, b]$. Njene Riemannove vsote konvergirajo proti limiti I, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti 0, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je*

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I \right| < \varepsilon,$$

za vsako delitev $\mathcal{D}$, pri kateri je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ, tj.

$$\max_{k \in \{1,2,\ldots,n\}} \delta_k < \delta$$

in vsako izbiro točk ξ_k.

Definicija 81 *Če za funkcijo f, definirano na $[a, b]$, obstaja limita I Riemannovih vsot, ko gre dolžina najdaljšega intervala proti 0, pravimo da je funkcija na intervalu $[a, b]$* ***integrabilna****, limito I pa imenujemo* ***določeni integral funkcije*** *f v mejah od a do b in pišemo:*

$$I = \int_a^b f(x)dx.$$

Število I imenujemo tudi ***Riemannov integral*** oz. ***določeni integral funkcije*** f na $[a, b]$.

Zgled: Naj bo funkcija f, s formulo $f(x) = 1/x^2$, definirana na intervalu $[a, b]$, $0 < a < b$. Direktno iz definicije bomo izračunali $\int_a^b 1/x^2 dx$.

Naj bo $\mathcal{D}$ delitev, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Izberimo si ξ_k na prav poseben način. Naj bo $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$ (tj. geometrična sredina števil x_{k-1} in x_k) in $\delta_k = x_k - x_{k-1}$.

$$\begin{aligned} f(\xi_k) &= \frac{1}{\xi_k^2} \\ &= \frac{1}{x_{k-1} \cdot x_k} \\ f(\xi_k)\delta_k &= \frac{1}{\xi_k^2}(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{x_k - x_{k-1}}{x_{k-1}x_k} \\ &= \frac{1}{x_{k-1}} - \frac{1}{x_k} \end{aligned}$$

Torej je Riemannova vsota za to delitev in to izbiro točk enaka:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\delta_k &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{x_1}\right) + \left(\frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{x_{n-1}} - \frac{1}{b}\right) \\ &= \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right). \end{aligned}$$

Pri tej izbiri točk ξ_k je Riemannova vsota vedno enaka $1/a - 1/b$. Če torej limita I Riemannovih vsot obstaja, mora biti $I = 1/a - 1/b$.

Dokažimo še, da Riemannove vsote res konvergirajo k I. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna na zaprtem intervalu $[a, b]$, je na tem intervalu enakomerno zvezna. Obstaja torej $\delta > 0$, da je $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon/(b-a)$, čim je $|\tilde{x} - x| < \delta$, $\tilde{x}, x \in [a, b]$. Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev, pri kateri je $\max \delta_k < \delta$. Naj bo $\xi_k = \sqrt{x_{k-1}x_k}$, $\tilde{\xi}_k$ pa poljubna točka intervala $[x_{k-1}, x_k]$. Jasno je

$$|\tilde{\xi}_k - \xi_k| < x_k - x_{k-1} = \delta_k < \delta$$

in zato po zgornjem sledi:

$$|f(\tilde{\xi}_k) - f(\xi_k)| < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Ocenimo razliko

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\xi}_k)\delta_k - I\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(\tilde{\xi}_k)\delta_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k\right| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\tilde{\xi}_k) - f(\xi_k)|\delta_k \\ &< \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\delta_k \\ &= \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) \\ &= \varepsilon.\end{aligned}$$

Sklep: Funkcija f, dana s predpisom $f(x) = 1/x^2$, je integrabilna na $[a, b]$ in je

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{a} - \frac{1}{b}, \qquad 0 < a < b.$$

$\Diamond$

Izrek 46 *Če je funkcija f integrabilna na $[a, b]$, je funkcija f na $[a, b]$ omejena.*

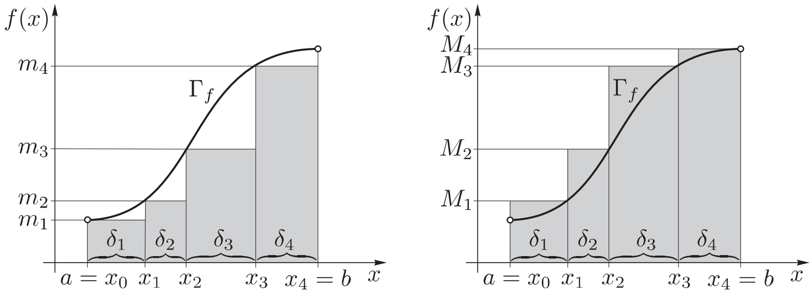
Dokaz: Naj bo f na $[a, b]$ integrabilna. Recimo, da f ni navzgor omejena. Naj bo $\varepsilon > 0$. Naj bo I integral funkcije f. Tedaj obstaja $\delta > 0$, da je

$$(*) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I\right| < \varepsilon, \qquad \text{čim je } \max\delta_k < \delta.$$

Naj bo $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ neka delitev, kjer je dolžina $\max\delta_k < \delta$. Tedaj velja $(*)$ za vsako izbiro točk $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$. Ker f ni navzgor omejena, lahko vsaj na enem od intervalov $[x_{k-1}, x_k]$ izberemo ξ_{k_0} tako, da bo $f(\xi_{k_0})$ poljubno veliko pozitivno število, torej tudi $f(\xi_{k_0})\delta_k$ poljubno veliko pozitivno število. To pa je v protislovju z $(*)$. Protislovje kaže, da je začetna predpostavka, da f ni navzgor omejena, napačna. Torej je funkcija f navzgor omejena. Podobno pokažemo, da je funkcija f navzdol omejena. $\square$

Vprašamo se: Katere omejene funkcije na $[a, b]$ so integrabilne? Če je f integrabilna, kako morda na preprost način izračunati $\int_a^b f(x)dx$? Za odgovor na prvo vprašanje bomo razvili geometrično sredstvo, ki mu pravimo Darbouxove vsote oz. Darbouxov integral. Odgovor na drugo vprašanje pa bomo spoznali nekoliko pozneje.

5.3 Darbouxove vsote



Slika 5.2: Spodnja in zgornja Darbouxova vsota

Naj bo f omejena na $[a, b]$. Naj bo

$$m = \inf \{ f(x) : x \in [a, b] \}$$

in

$$M = \sup \{ f(x) : x \in [a, b] \}.$$

$\mathcal{D}$ naj bo poljubna delitev

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b.$$

Naj bo

$$m_k = \inf \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}$$

in

$$M_k = \sup \{ f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k] \}.$$

Jasno je

$$m \le m_k \le M_k \le M, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Vsota

$$m_1\delta_1 + m_2\delta_2 + \ldots + m_n\delta_n$$

je natančno določena z delitvijo $\mathcal{D}$. Imenujemo jo ***spodnja Darbouxova vsota***, prirejena delitvi $\mathcal{D}$. Označimo jo $s(\mathcal{D})$.

$$s(\mathcal{D}) := \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\},$$

pri tem je

$$\delta_k = x_k - x_{k-1}.$$

Zgornja Darbouxova vsota, prirejena delitvi $\mathcal{D}$, je

$$S(\mathcal{D}) := \sum_{k=1}^{n} M_k \delta_k, \qquad k \in \{1, 2, \ldots, n\}.$$

Vedno velja

$$s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}),$$

ker je $m \leq m_k \leq M_k \leq M$ za vsak k in zato tudi

$$\sum_{k=1}^{n} m\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k \leq \sum_{k=1}^{n} M\delta_k.$$

Torej

$$m(b-a) \leq s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}) \leq M(b-a).$$

Na sliki 5.2 je ploščina osenčenega lika na levi enaka spodnji Darbouxovi vsoti, ploščina na desni pa zgornji Darbouxovi vsoti.

Definicija 82 *Delitev $\mathcal{D}'$ je nadaljevanje delitve $\mathcal{D}$ (pravimo, da je delitev $\mathcal{D}'$ finejša od delitve $\mathcal{D}$), če delitev $\mathcal{D}'$ vsebuje vse delitvene točke delitve $\mathcal{D}$, tj. če je $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$.*

Izrek 47 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$. Tedaj je $s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D}')$, $S(\mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D})$, tj. pri prehodu na finejšo delitev se spodnja vsota ne zmanjša, zgornja vsota pa se ne poveča.*

Dokaz: Delitev $\mathcal{D}'$ lahko dobimo iz delitve $\mathcal{D}$ tako, da dodajamo po eno točko naenkrat. Zato je dovolj dokazati izrek za primer, ko ima $\mathcal{D}'$ natanko eno točko več od $\mathcal{D}$.

Naj bo $x_i' \in (x_{i-1}, x_i)$ nova delilna točka. Razdelimo $[x_{i-1}, x_i]$ na dva dela, tj. $[x_{i-1}, x_i']$ in $[x_i', x_i]$. Naj bo $m_i' = \inf\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i']\}$, $M_i' = \sup\{f(x), x \in [x_{i-1}, x_i']\}$ in $m_i'' = \inf\{f(x), x \in [x_i', x_i]\}$, $M_i'' = \sup\{f(x), x \in [x_i', x_i]\}$. Na skupnih intervalih delitve $\mathcal{D}'$ in $\mathcal{D}$ imata vsoti $s(\mathcal{D}')$ in $s(\mathcal{D})$ iste člene. Na i-tem intervalu ima $s(\mathcal{D})$ člen $m_i\delta_i$, $s(\mathcal{D}')$ pa ima dva člena:

$m_i'(x_i' - x_{i-1})$ in $m_i''(x_i - x_i')$. Ker je $m_i' \geq m_i$ in $m_i'' \geq m_i$, sledi

$$\begin{aligned} m_i'(x_i' - x_{i-1}) + m_i''(x_i - x_i') &\geq m_i(x_i' - x_{i-1}) + m_i(x_i - x_i') \\ &= m_i(x_i' - x_{i-1} + x_i - x_i') \\ &= m_i \delta_i. \end{aligned}$$

Sledi $s(\mathcal{D}') \geq s(\mathcal{D})$. Podobno velja za $S(\mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D})$. □

Izrek 48 *Naj bosta $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$ poljubni delitvi. Tedaj je $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}')$.*

Dokaz: Če je $\mathcal{D} = \mathcal{D}'$ je očitno. Če pa je $\mathcal{D} \neq \mathcal{D}'$, je po prejšnjem izreku:

$$s(\mathcal{D}) \leq s(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D} \cup \mathcal{D}') \leq S(\mathcal{D}')$$

□

Opomba: Ker je za vsako delitev

$$S(\mathcal{D}') \leq M(b - a),$$

sledi, da so spodnje vsote navzgor omejene z $M(b - a)$. Podobno so zgornje vsote navzdol omejene z $m(b - a)$. Obstajata torej končni števili

$$I_1 = \sup \big\{ s(\mathcal{D}) : \text{ po vseh delitvah } \mathcal{D} \big\}$$

in

$$I_2 = \inf \big\{ S(\mathcal{D}) : \text{ po vseh delitvah } \mathcal{D} \big\}$$

Ker je $s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}')$ za vsak $\mathcal{D}$ in $\mathcal{D}'$, sledi $I_1 \leq I_2$.

Definicija 83 *Naj bo f omejena funkcija na $[a, b]$. Funkcija f je **integrabilna po Darbouxu**, če je supremum njenih spodnjih vsot enak infimumu njenih zgornjih vsot, tj. če je $I_1 = I_2$.*

Še enkrat se spomnimo na definicijo (Riemannovega) integrala. Pokazali bomo, da je f (Riemannovo) integrabilna natanko tedaj, ko je integrabilna po Darbouxu.

Izrek 49 *Omejena funkcija f je na $[a, b]$ integrabilna po Darbouxu natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna delitev $\mathcal{D}$, da je:*

$$|S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D})| < \varepsilon.$$

Dokaz: ($\Rightarrow$) Recimo, da je f integrabilna po Darbouxu. Potem je

$$I_1 = I_2 \quad \text{oz.} \quad I := \sup s(\mathcal{D}) = \inf S(\mathcal{D}).$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Ker je $I = I_1$, obstaja takšna delitev $\mathcal{D}_1$, da je $|s(\mathcal{D}_1) - I| < \varepsilon/2$. Ker je $I = I_2$, obstaja takšna delitev $\mathcal{D}_2$, da je $|S(\mathcal{D}_2) - I| < \varepsilon/2$. Sledi:

$$\begin{aligned} S(\mathcal{D}_2) - s(\mathcal{D}_1) &= |S(\mathcal{D}_2) - s(\mathcal{D}_1)| \\ &\leq |s(\mathcal{D}_1) - I| + |I - S(\mathcal{D}_2)| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{D} = \mathcal{D}_1 \cup \mathcal{D}_2$. Vemo: $s(\mathcal{D}_1) \leq s(\mathcal{D})$ in $S(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}_2)$. Zato je

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) \leq S(\mathcal{D}_2) - s(\mathcal{D}_1) < \varepsilon.$$

($\Leftarrow$) Naj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja takšna delitev $\mathcal{D}$, da je $|S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D})| < \varepsilon$. Ker je $s(\mathcal{D}) \leq I_1 \leq I_2 \leq S(\mathcal{D})$, sledi, da za vsak $\varepsilon > 0$ velja $|I_2 - I_1| < \varepsilon$ oz. $I_1 = I_2$. Torej je f integrabilna po Darbouxu. $\square$

Izrek 50 *Vsaka na $[a, b]$ zvezna funkcija je integrabilna po Darbouxu.*

Dokaz: Naj bo f zvezna na $[a, b]$. Tedaj vemo, da je f na $[a, b]$ enakomerno zvezna in omejena. Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Ker je f enakomerno zvezna na $[a, b]$, obstaja takšen $\delta > 0$, da je $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$, čim je $|\tilde{x} - x| < \delta$, $\tilde{x}, x \in [a, b]$. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev, pri kateri je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ. Če sta $\tilde{x}, x$ na enem od podintervalčkov $[x_{k-1}, x_k]$, je $|f(\tilde{x}) - f(x)| < \varepsilon/(b - a)$ in zato $|M_k - m_k| \leq \varepsilon/(b - a)$, za vsak $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ker je $\sum_{k=1}^n \delta_k = b - a$, sledi, da je

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \frac{\varepsilon}{b-a}\delta_k \\
&= \frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{k=1}^{n}\delta_k \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Po izreku 49 sledi, da je f integrabilna po Darbouxu. □

Opomba: Dovolj je predpostaviti, da je f zvezna na (a, b) in omejena na $[a, b]$. Naj bo $\eta > 0$ majhen. Na $[a + \eta, b - \eta]$ je f enakomerno zvezna. Naj bo $\mathcal{D} = \{a = x_0, a + \eta = x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} = b - \eta, x_n = b\}$ delitev. Tedaj je

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) = (M_1 - m_1)\eta + (M_n - m_n)\eta + \sum_{k=2}^{n-1}(M_k - m_k)\delta_k$$

poljubno majhen, če je delitev dovolj fina. Pri tem je vsota prvih dveh členov največ $2(M - m)\eta$. Če je torej delitev dovolj fina, je $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D})$ poljubno majhna. Torej je f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$.

Izrek 51 *Vsaka na $[a, b]$ monotona funkcija je integrabilna po Darbouxu.*

Dokaz: Naj bo f monotona, npr. naraščajoča na $[a, b]$. Naj bo $\mathcal{D} = \{a = x_0 < a_1 < \ldots < x_n = b\}$ delitev. Tedaj je $m = f(a)$, $M = f(b)$ in $M_k - m_k \leq f(x_k) - f(x_{k-1})$. Zato je

$$\begin{aligned}
S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) &= \sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \\
&= \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \big(f(x_k) - f(x_{k-1})\big)\delta_k \\
&\leq \big(f(x_1) - f(a) + f(x_2) - f(x_1) + \ldots + f(b) - f(x_{n-1})\big)\delta \\
&= \big(f(b) - f(a)\big)\delta,
\end{aligned}$$

kjer je δ dolžina najdaljšega intervala. Sklep: Če je dolžina najdaljšega intervala enaka δ, je

$$S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) \leq \delta\big(f(b) - f(a)\big) = \delta(M - m),$$

kar pa je poljubno majhno ob dovolj fini delitvi, tj. ob dovolj majhnem δ. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo delitev $\mathcal{D}$, da bo $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$. Delitev seveda vzamemo tako fino, da je $\delta(M - m) < \varepsilon$. To pomeni, da je f integrabilna po Darbouxu. □

Izrek 52 *Naj bo f omejena na $[a, b]$ in $a < c < b$. Tedaj je f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$ natanko tedaj, ko je po Darbouxu integrabilna na $[a, c]$ in na $[c, b]$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$. Pri danem $\varepsilon > 0$ izberemo delitev $\mathcal{D}$, da je $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$. c naj bo delilna točka. Velja $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) = \sum'(M_k - m_k)\delta_k + \sum''(M_k - m_k)\delta_k$, kjer so z $'$ označeni podintervali iz $[a, c]$ in z $''$ podintervali iz $[c, b]$. Ker sta sumanda nenegativna in je njuna vsota manjša od ε, sledi, da je $\sum'(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon$ in $\sum''(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon$. Ker je $\sum'$ razlika med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto na $[a, c]$ in $\sum''$ razlika med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto na $[c, b]$, sledi: za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo delitvi $[a, c]$ in $[c, b]$, da sta razliki med zgornjo in spodnjo Darbouxovo vsoto za vsakega od teh intervalov manjši od ε. Torej je f res integabilna po Darbouxu na $[a, c]$ in $[c, b]$.

($\Leftarrow$) Naj bo f integrabilna na $[a, c]$ in $[c, b]$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja delitev intervala $[a, c]$, da je $\sum'(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon/2$, in delitev intervala $[c, b]$, da je $\sum''(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon/2$. Iz obeh delitev sestavimo delitev intervala $[a, b]$, od koder dobimo:

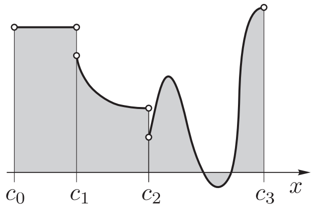
$$\begin{aligned}\sum(M_k - m_k)\delta_k &= \sum{}' + \sum{}''(M_k - m_k)\delta_k \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Ker je bil $\varepsilon > 0$ poljuben, sledi, da je f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$. □

Trditev 31 *Naj bo f omejena na $[a, b]$ in naj obstajajo takšna števila c_i, da je:*

$$a = c_0 < c_1 < \ldots < c_r = b$$

in, da je f zvezna na vsakem odprtem podintervalu (c_{i-1}, c_i), $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Tedaj je f integrabilna po Darbouxu na intervalu $[a, b]$.



Slika 5.3: Nezvezna in še vedno integrabilna funkcija

Dokaz: Opomba k izreku 50 nam pove, da je f integrabilna po Darbouxu na vsakem zaprtem podintervalu $[c_{i-1}, c_i]$, $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$. Trditev sedaj sledi iz izreka 52. $\square$

Izrek 53 *Naj bo f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$. Za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$ za vsako delitev $\mathcal{D}$, pri kateri je $\max \delta_k < \delta$, tj., pri kateri je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ.*

Dokaz: Če je $M = m$ ni kaj dokazovati. Naj bo torej $M \neq m$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je f integrabilna po Darbouxu na $[a, b]$, obstaja delitev $\mathcal{D}_0$, da je $S(\mathcal{D}_0) - s(\mathcal{D}_0) < \varepsilon/2$. Naj bo delitev $\mathcal{D}_0$ sestavljena iz r točk x_i'. Naj bo $\delta = \varepsilon/\big(2r(M-m)\big)$. Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev, pri kateri je dolžina $\max \delta_k < \delta$. Zapišimo

$$
\begin{aligned}
(*) \quad S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) &= \sum (M_k - m_k)\delta_k \\
&= \sum{}' + \sum{}'' (M_k - m_k)\delta_k,
\end{aligned}
$$

kjer je $\sum'$ vsota po tistih delnih intervalih delitve $\mathcal{D}$, ki ne vsebujejo nobene x_i' v svoji notranjosti, $\sum''$ pa vsota po preostalih intervalih. V tej drugi vsoti je največ r sumandov, vsak od teh sumandov pa je $\leq (M-m)\delta = \varepsilon/(2r)$. Torej je vsota $\sum'' \leq r\varepsilon/(2r) = \varepsilon/2$. $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}$ je nadaljevanje delitve $\mathcal{D}_0$, zato je po izreku 47 $S(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}) - s(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}) < \varepsilon/2$. Vsota $\sum'$ je del vsote $S(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}) - s(\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D})$. Nanaša se na tiste podintervale iz $\mathcal{D}$, ki ne vsebujejo točk delitve $\mathcal{D}_0$ v svoji notranjosti in so zato ti delni intervali tudi delni intervali delitve $\mathcal{D}_0 \cup \mathcal{D}$. Od tod sledi, da je tudi prvi sumand v $(*)$ manjši od $\varepsilon/2$. Iz (*) sledi, da je $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$, za vsako delitev $\mathcal{D}$, za katero je $\max \delta_k < \delta$. □

Definicija 84 *Naj bo f na $[a, b]$ integrabilna po Darbouxu, torej je*

$$\sup_{\mathcal{D}} s(\mathcal{D}) = I_1 = I_2 = \inf_{\mathcal{D}} S(\mathcal{D}).$$

Število $I = I_1 = I_2$ imenujemo ***Darbouxov integral*** *funkcije f na $[a, b]$.*

Izrek 54 *Funkcija je na $[a, b]$ integrabilna natanko tedaj, ko je na $[a, b]$ integrabilna po Darbouxu. Če se to zgodi, je določeni integral funkcije f na $[a, b]$ enak Darbouxovemu integralu.*

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Naj bo f integrabilna (tj. integrabilna v smislu določenega, tj. Riemannovega integrala) in naj bo $I = \int_a^b f(x)dx$. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po definiciji Riemannovega integrala obstaja $\delta > 0$, da je

$$(*) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I \right| < \frac{\varepsilon}{3}$$

za vsako delitev, pri kateri je $\max \delta_k < \delta$, in za vsako izbiro točk ξ_k. Sledi, da je

$$(**) \qquad \left| \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k - I \right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Če bi namreč bilo $|\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k - I| > \frac{\varepsilon}{3}$, potem bi veljalo $|\sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k - I| > \frac{\varepsilon}{3} + \eta$ za nek $\eta > 0$. Ker lahko na k-tem intervalu izberemo ξ_k tako, da je $|f(\xi_k) - m_k|$ poljubno majhno, lahko to izbiro naredimo tako, da je

$$\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k) - m_k|\, \delta_k < \eta.$$

Od tod pa sledi:

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I \right| &= \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I + \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \right| \\
&\geq \left| \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k - I \right| - \left| \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k \right| \\
&> \frac{\varepsilon}{3} + \eta - \eta \\
&= \frac{\varepsilon}{3}.
\end{aligned}$$

To pa je v protislovju z $(*)$, torej res velja $(**)$. Podobno pokažemo

$$(***)\left|\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k - I\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Iz $(**)$ in $(***)$ sledi, da je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\delta_k &\leq \left|\sum_{k=1}^{n} M_k\delta_k - I\right| + \left|I - \sum_{k=1}^{n} m_k\delta_k\right| \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} \\ &< \varepsilon,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D})$ poljubno majhna, torej je f integrabilna po Darbouxu.

($\Leftarrow$) Naj bo f integrabilna po Darbouxu in naj bo $I_1 = I_2 = I'$ njen Darbouxov integral. Naj bo $\varepsilon > 0$. Po izreku 53 obstaja $\delta > 0$, da za vsako delitev $\mathcal{D}$, pri kateri je $\max \delta_k < \delta$, velja $S(\mathcal{D}) - s(\mathcal{D}) < \varepsilon$. Ker je

$$s(\mathcal{D}) \leq \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k \leq S(\mathcal{D})$$

in

$$s(\mathcal{D}) \leq I' \leq S(\mathcal{D}),$$

sledi

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k - I'\right| < \varepsilon.$$

Torej je f integrabilna na $[a, b]$ in $I' = \int_a^b f(x)dx$. □

Pomembna opomba: Integrabilnost je torej isto kot integrabilnost po Darbouxu in določeni, tj. Riemannov integral je enak Darbouxovemu integralu. Odslej bomo govorili le, da je f integrabilna.

Izrek 55 *Naj bo f integrabilna na $[a, b]$ in g zvezna funkcija na $[m, M]$, kjer je*

$$m = \inf\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

in

$$M = \sup\{f(x) : x \in [a, b]\}$$

Tedaj je $F = g \circ f$ integrabilna na $[a, b]$.

Dokaz: Če je $M = m$, ni kaj dokazovati. Naj bo $M \neq m$ in naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Ker je funkcija g zvezna na zaprtem intervalu $[m, M]$, je g na $[m, M]$ enakomerno zvezna. Zato obstaja $\delta > 0$, da je

$$(*) \qquad |g(u') - g(u)| < \varepsilon, \text{ čim je } |u' - u| < \delta.$$

Ker je f integrabilna na $[a, b]$, obstaja delitev $\mathcal{D}$ intervala $[a, b]$, da je

$$(**) \qquad S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) < \varepsilon\delta.$$

Pišimo

$$S(f, \mathcal{D}) - s(f, \mathcal{D}) = \sum{}' + \sum{}''(M_k - m_k)\delta_k,$$

kjer se vsota $\sum'$ nanaša na tiste intervale delitve $\mathcal{D}$, za katere je $M_k - m_k < \delta$, vsota $\sum''$ pa na tiste intervale delitve $\mathcal{D}$, za katere je $M_k - m_k \geq \delta$. Zaradi $(**)$ je vsaka od obeh vsot $< \varepsilon\delta$. Iz $\sum'' \delta_k \delta \leq \sum''(M_k - m_k)\delta_k < \varepsilon\delta$, s krajšanjem dobimo:

$$(***) \qquad \sum{}'' \delta_k < \varepsilon,$$

kar pomeni, da je vsota dolžin intervalov iz $\sum''$ zagotovo $< \varepsilon$.

Naj bo $\overline{m}_k$ natančna spodnja meja funkcije $F = g \circ f$ na k-tem intervalu delitve $\mathcal{D}$, $\overline{M}_k$ pa natančna zgornja meja funkcije F na k-tem intervalu delitve $\mathcal{D}$. Na k-tem intervalu so vrednosti $f(x) = u$ med m_k in M_k. Za intervale v vsoti $\sum'$, kjer je $M_k - m_k < \delta$, velja za vsaka x in $\widetilde{x}$ iz takšnega intervala:

$$|F(\widetilde{x}) - F(x)| = |g(u') - g(u)| < \varepsilon,$$

saj je $|u' - u| = |f(\widetilde{x}) - f(x)| \leq M_k - m_k < \delta$ (v $\sum'$). Torej za vse intervale iz vsote $\sum'$ velja $\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq \varepsilon$. Zapišimo Darbouxove vsote za kompozitum.

$$S(F, \mathcal{D}) - s(F, \mathcal{D}) = \sum{}' + \sum{}''(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k$$

Za vsoto $\sum'$ je $\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq \varepsilon$, torej je $\sum'(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k \leq \varepsilon \sum' \delta_k \leq \varepsilon(b - a)$. Za vsoto $\sum''$ upoštevamo: $\overline{M}_k - \overline{m}_k \leq \overline{M} - \overline{m}$, kjer je $\overline{m} = \inf g$ in $\overline{M} = \sup g$ na $[m, M]$. Zaradi $(***)$ sledi $\sum''(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k \leq (\overline{M} - \overline{m}) \sum'' \delta_k < (\overline{M} - \overline{m})\varepsilon$.

Torej: za vsak $\varepsilon > 0$ smo dobili delitev $\mathcal{D}$, da je

$$S(F, \mathcal{D}) - s(F, \mathcal{D}) = \sum{}' + \sum{}''(\overline{M}_k - \overline{m}_k)\delta_k < \varepsilon(b - a) + (\overline{M} - \overline{m})\varepsilon.$$

Sklep: Naj bo $\tau > 0$. Izberimo $\varepsilon > 0$ tako majhen, da bo $\varepsilon(b-a)+(\overline{M}-\overline{m})\varepsilon < \tau$. Tedaj smo našli delitev $\mathcal{D}$, da bo

$$S(F,\mathcal{D}) - s(F,\mathcal{D}) < \varepsilon(b-a) + (\overline{M} - \overline{m})\varepsilon < \tau.$$

Funkcija $F = g \circ f$ je torej integrabilna na $[a,b]$. $\square$

Posledica 26 *Če je f integrabilna na $[a,b]$, sta na $[a,b]$ integrabilni funkciji $|f|$ in f^n, za vsak $n \in \mathbb{N}$, kjer smo označili*

$$|f|(x) := |f(x)| \quad in \quad (f^n)(x) := \big(f(x)\big)^n$$

Dokaz: Funkciji $u \mapsto |u|$ in $u \mapsto u^n$ sta zvezni. Uporabimo prejšnji izrek. $\square$

5.4 Lastnosti določenega integrala

Trditev 32 *Konstantna funkcija f, $f(x) = c$, $x \in [a,b]$, je integrabilna in velja:*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b cdx = c(b-a).$$

Dokaz: Vsaka Riemannova vsota je

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n f(\xi_k)\delta_k &= \sum_{k=1}^n c\delta_k \\ &= c\sum_{k=1}^n \delta_k \\ &= c(b-a)\end{aligned}$$

Torej limita obstaja in je enaka $c(b-a)$. $\square$

Izrek 56 *Naj bosta f in g integrabilni na $[a,b]$. Tedaj so*

1. $f + g$,
2. λf, *kjer je λ je konstanta,*
3. fg

integrabilne funkcije na $[a,b]$.

Dokaz:

1. Naj bo $\mathcal{D}$ delitev. V k-tem intervalu, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, izberimo točko ξ_k. Zapišimo Riemannovo vsoto za funkcijo $f + g$:
$$\sum_{k=1}^{n} (f+g)(\xi_k)\delta_k = \sum_{k=1}^{n} \big(f(\xi_k) + g(\xi_k)\big)\delta_k \stackrel{(\dagger)}{=} \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k + \sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\delta_k.$$
Ker je f integrabilna na $[a, b]$, vsota $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k$ konvergira k številu $\int_a^b f(x)dx$. Ker je g integrabilna na $[a, b]$, vsota $\sum_{k=1}^{n} g(\xi_k)\delta_k$ konvergira k številu $\int_a^b g(x)dx$. Zaradi enakosti $(\dagger)$ sledi, da tudi vsota $\sum_{k=1}^{n}(f + g)(\xi_k)\delta_k$ konvergira in velja
$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

2. Dokažemo na podoben način kot 1.

3. Funkciji f in g sta integrabilni na $[a, b]$. Iz točke 1. sledi, da je na $[a, b]$ integrabilna tudi $f + g$. Iz izreka 55 oz. prejšnje posledice sledi, da so integrabilne tudi f^2, g^2 in $(f + g)^2$. Torej je integrabilna tudi funkcija
$$fg = \tfrac{1}{2}[(f+g)^2 - f^2 - g^2].$$

$\square$

Trditev 33 *Naj bo f integrabilna na $[a, b]$.*

1. *Če je $f(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$, je*
$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

2. *Velja*
$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\, dx$$

Dokaz:

1. Če je $f(x) \geq 0$ povsod na $[a, b]$, so vse Riemannove vsote nenegativne, torej je tudi njihova limita nenegativna.

2. Ker je

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k\right| &\leq \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)\delta_k| \\ &= \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\,\delta_k,\end{aligned}$$

v limiti dobimo

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx.$$

□

Posledica 27 *Če sta funkciji f in g integrabilni na intervalu $[a,b]$ ter velja*

$$f(x) \leq g(x) \quad \textit{za vsak } x \in [a,b],$$

je tudi

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Dokaz: Funkcija $g - f$ je integrabilna in $g(x) - f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a,b]$. Torej velja

$$\int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx \geq 0$$

in od tod

$$\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

oziroma

$$\int_a^b g(x)dx \geq \int_a^b f(x)dx.$$

□

Izrek 57 *Naj bo f integrabilna na $[a,b]$ in $a < c < b$. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Dokaz: Po znanem izreku je f integrabilna na $[a,c]$ in $[c,b]$. Zapišimo Riemannovo vsoto za f na $[a,b]$, pri čemer je c ena od delilnih točk:

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\delta_k = \sum{}' f(\xi_k)\delta_k + \sum{}'' f(\xi_k)\delta_k,$$

pri čemer je $\sum'$ vsota po intervalih na $[a,c]$ in $\sum''$ vsota po intervalih na $[c,b]$. Naredimo limito (tj. dolžino najdaljšega intervalčka pošljemo proti 0) tako, da je c ves čas delilna točka. V limiti dobimo:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

$\square$

Opomba: 1. Po dogovoru bomo pisali

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

2. Če je $b < a$ ter f integrabilna na $[b,a]$, pišemo

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

3. Formula

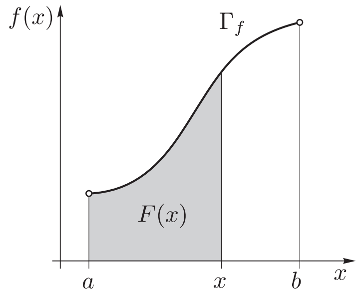
$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

tedaj velja za poljubne a, b, c. Pomembno je le, da je f integrabilna na največjem nastopajočem intervalu, slika 5.4.

Slika 5.4: Funkcija mora biti integrabilna na intervalu $[a,b]$

5.5 Določeni integral kot funkcija zgornje meje

Opomba: $\int_a^b g(x)dx$ je število, torej x po izračunu izgine. Tako lahko oznako za integral oklestimo do $\int_a^b g(x)dx = \int_a^b g(t)dt = \int_a^b g$.



Slika 5.5: Določeni integral kot funkcija zgornje meje

Naj bo f integrabilna na $[a, b]$. Če je $x \in [a, b]$, definiramo

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

ko je $x = a$, je

$$F(a) = \int_a^a f(t)dt = 0,$$

ko je $x = b$, je

$$F(b) = \int_a^b f(t)dt.$$

Izrek 58 *Naj bo f integrabilna na $[a, b]$. Tedaj je F,*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

na intervalu $[a, b]$ zvezna. Če je v točki x integrand f zvezna funkcija, je v tej točki F odvedljiva in velja

$$F'(x) = f(x).$$

Dokaz: Vemo, da je f na $[a, b]$ omejena, tj. obstaja M, da je $|f(x)| \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$. Če je $x, x' \in [a, b]$, je

$$\begin{aligned} F(x') - F(x) &= \int_a^{x'} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x'} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt \\ &= \int_x^{x'} f(t)dt. \end{aligned}$$

Če je $x' > x$, dobimo

$$\begin{aligned}
|F(x') - F(x)| &= \left| \int_x^{x'} f(t)dt \right| \\
&\leq \int_x^{x'} |f(t)|dt \\
&\leq \int_x^{x'} M dt \\
&= M(x' - x).
\end{aligned}$$

Če je $x' < x$, dobimo

$$\begin{aligned}
|F(x') - F(x)| &= \left| \int_x^{x'} f(t)dt \right| \\
&= \left| \int_{x'}^{x} f(t)dt \right| \\
&\leq \int_{x'}^{x} |f(t)|dt \\
&\leq \int_{x'}^{x} M dt \\
&= M(x - x').
\end{aligned}$$

Torej za poljuben $x, x' \in [a, b]$ velja

$$|F(x') - F(x)| \leq M|x' - x|.$$

Naj bo $x \in [a, b]$ in $\varepsilon > 0$. Naj bo $\delta = \varepsilon/M$. Če je $x' \in [a, b]$, $|x' - x| < \delta$, je torej

$$\begin{aligned}
|F(x') - F(x)| &\leq M|x' - x| \\
&< M\delta \\
&= M\frac{\varepsilon}{M} \\
&= \varepsilon,
\end{aligned}$$

kar pomeni, da je F zvezna v x.

Predpostavimo sedaj, da je funkcija f zvezna v $x \in [a, b]$. Oglejmo si diferenčni kvocient

$$\begin{aligned}
\frac{F(x+h)-F(x)}{h} &= \frac{1}{h}\left(\int_a^{x+h} f(t)dt - \int_a^x f(t)dt\right) \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(t)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(x)+f(t)-f(x)\big)dt \\
&= \frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dt + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)dt \\
&= f(x) + \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)dt.
\end{aligned}$$

Torej velja:

$$(*) \qquad \begin{aligned}
\left|\frac{F(x+h)-F(x)}{h} - f(x)\right| &= \left|\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big(f(t)-f(x)\big)dt\right| \\
&\leq \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big|f(t)-f(x)\big|dt.
\end{aligned}$$

Opomba: Zadnja neenakost je očitna za pozitivne vrednosti h. Velja pa tudi za negativne vrednosti h.

Izberimo $\varepsilon > 0$. Ker je f zvezna v x, obstaja $\delta > 0$, da velja: če je $|t-x| < \delta$, je $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$. Izberimo sedaj h tako, da je $0 < h < \delta$. Za tako izbran h velja za vsak $t \in [x, x+h]$ neenakost $|f(t)-f(x)| < \varepsilon$, torej

$$\begin{aligned}
\frac{1}{h}\int_x^{x+h} \big|f(t)-f(x)\big|dt &< \frac{1}{h}\int_x^{x+h} \varepsilon dt \\
&= \frac{1}{h}\varepsilon h \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

Enaka ocena velja, če je $-\delta < h < 0$. To pa zaradi $(*)$ pomeni

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x+h)-F(x)}{h} = f(x),$$

kar pa pove, da je F v točki x odvedljiva in je $F'(x) = f(x)$.

Izrek velja tudi v krajiščih. V primeru zveznosti f, v levem krajišču obstaja desni odvod

$$\lim_{h\downarrow 0} \frac{F(a+h)-F(a)}{h} = f(a),$$

v desnem krajišču pa levi odvod

$$\lim_{h \uparrow 0} \frac{F(b+h) - F(b)}{h} = f(b).$$

$\square$

Posledica 28 *Če je funkcija f zvezna na intervalu $[a, b]$, tedaj je funkcija F, definirana kot*

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

odvedljiva na $[a, b]$ in velja

$$F'(x) = f(x), \quad \text{za vsak } x \in [a, b]$$

torej je funkcija F primitivna funkcija (nedoločeni integral) funkcije f.

Posledica 29 *Vsaka na intervalu zvezna funkcija ima na tem intervalu primitivno funkcijo, tj. nedoločeni integral.*

Opomba. Primitivna funkcija elementarne funkcije ni nujno elementarna funkcija. Npr. $x \mapsto (\sin x)/x$ primitivno funkcijo (kot zvezna funkcija) ima, ki pa ni elementarna funkcija.

Vemo že, da nima vsaka integrabilna funkcija primitivne funkcije. Če ima integrabilna funkcija primitivno funkcijo, pa velja t.i. ***osnovni izrek integralnega računa***.

5.6 Osnovni izrek integralnega računa-Leibnizeva formula

Izrek 59 *Naj bo f takšna integrabilna funkcija na $[a, b]$, ki ima na $[a, b]$ primitivno funkcijo. Naj bo F neka njena primitivna funkcija, tj. naj velja $F'(x) = f(x)$, za vsak $x \in [a, b]$. Tedaj velja t.i.* ***Leibnizeva formula***

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Opomba: Izrek torej velja za vsako zvezno funkcijo f. Desno stran označimo tudi z

$$[F(x)]_a^b = F(x)\Big|_{x=a}^{x=b} = [F]_a^b$$

Dokaz:

1. Preprost dokaz v primeru, ko je f zvezna funkcija na $[a,b]$. Tedaj je po prejšnjem izreku funkcija G, $G(x) := \int_a^x f(t)dt$, primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$. Ker je $G(b) := \int_a^b f(t)dt$ in $G(a) := \int_a^a f(t)dt = 0$, odštejemo in dobimo ravno Leibnizevo formulo

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a).$$

   Naj bo F poljubna primitivna funkcija funkcije f na $[a,b]$. Iz znanega izreka sledi, da je $F(x) = G(x) + C$, za vsak $x \in [a,b]$, kjer je C konstanta.

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= \big(G(b) + C\big) - \big(G(a) + C\big) \\ &= G(b) - G(a) \\ &= \int_a^b f(t)dt \end{aligned}$$

2. Dokažimo izrek še za splošno funkcijo f, tj. v primeru, ko f ni nujno zvezna. Izberemo poljubno delitev $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$. Po Lagrangeevem izreku obstajajo $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, da je $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, in

$$\begin{aligned} \frac{F(x_1) - F(x_0)}{x_1 - x_0} &= F'(\xi_1) = f(\xi_1), \\ \frac{F(x_2) - F(x_1)}{x_2 - x_1} &= F'(\xi_2) = f(\xi_2), \\ &\cdots \\ \frac{F(x_n) - F(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}} &= F'(\xi_n) = f(\xi_n) \end{aligned}$$

   Prvo enačbo zgornjega sistema enačb pomnožimo z $(x_1 - x_0)$, drugo enačbo z $(x_2 - x_1)$,... in jih na koncu med seboj seštejemo. Potem je

$$F(x_n) - F(x_0) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

oziroma

$$F(b) - F(a) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Pokazali smo torej, da je za vsako delitev $\mathcal{D} = \{a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b\}$ mogoče izbrati točke ξ_k, $x_{i-1} < \xi_i < x_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, tako, da je ustezna Riemannova vsota enaka $F(b) - F(a)$. To pa pomeni, da je integral enak limiti Riemannovih vsot (ki obstaja, saj je f integrabilna) enaka $F(b) - F(a)$.

$\square$

Opomba: Leibnizeva formula velja tudi, če je $a > b$:

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= -\int_b^a f(x)dx \\ &= -\big(F(a) - F(b)\big) \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Zgled: Izračunajmo ploščino lika, omejenega z $x = 1$, $x = 2$, $f(x) = 0$ in $f(x) = x^2$.

$$\begin{aligned}p &= \int_1^2 x^2 dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3}\right]_1^2 \\ &= \frac{2^3}{3} - \frac{1^3}{3} \\ &= \frac{7}{3}\end{aligned}$$

$\lozenge$

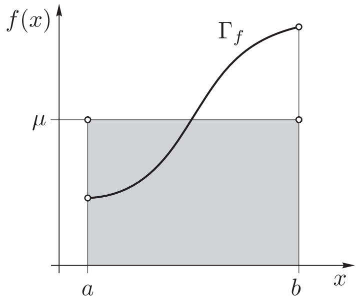
Opomba: Ta primer pokaže, kako močno matematično sredstvo smo razvili. Z osnovnim izrekom integralskega računa znamo torej izračunati ploščino lika pod parabolo v eni sami vrsti.

5.7 Povprečje funkcije

Definicija 85 *Naj bo f integrabilna na $[a, b]$, $a < b$. Število*

$$\mu := \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

bomo imenovali ***povprečna vrednost funkcije*** *f na $[a, b]$.*



Slika 5.6: Povprečje funkcije

Recimo, da je funkcija f pozitivna. Zgornji izraz lahko zapišemo tudi drugače:

$$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),$$

pri čemer je leva stran enaka ploščini pod grafom funkcije f. Torej je μ višina pravokotnika, katerega ploščina $\mu(b-a)$ je enaka ploščini lika pod grafom funkcije f na $[a, b]$, slika 5.6.

Trditev 34 *Naj bo $m = \inf_{x\in[a,b]} f(x)$ in $M = \sup_{x\in[a,b]} f(x)$. Potem je $m \leq f(x) \leq M$ za vsak $x \in [a, b]$. Integrirajmo v mejah od a do b:*

$$\int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b M dx.$$

Od tod sledi:

$$m(b-a) \leq \mu(b-a) \leq M(b-a).$$

Če nastalo neenačbo delimo z $(b-a)$, dobimo:

$$m \leq \mu \leq M.$$

To pomeni, da je povprečna vrednost funkcije vedno med njenim supremumom in njenim infimumom.

Trditev 35 *Če je f zvezna funkcija na $[a, b]$, potem obstaja takšna točka $c \in [a, b]$, da velja:*

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c).$$

Dokaz: To je posledica izreka, ki pravi, da zvezna funkcija na zaprtem intervalu zavzame vse vrednosti med najmanjšo in največjo. $\square$

5.8 Uvedba nove spremenljivke v določeni integral

Izrek 60 *Naj bo f zvezna funkcija na $[a, b]$ in φ zvezno odvedljiva funkcija na $[\alpha, \beta]$. Naj bo $\varphi(t) \in [a, b]$, za vse $t \in [\alpha, \beta]$ in $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Dokaz: Naj bo F primitivna funkcija funkcije f. Ta namreč obstaja, saj je f zvezna. Kompozitum $F\big(\varphi(t)\big) = G(t)$ je definiran in zvezno odvedljiv na $[\alpha, \beta]$. (Ker ima φ vrednosti v $[a, b]$ in zato, ker sta φ in F odvedljivi, velja $G'(t) = F'\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t) = f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$.) Torej je G nedoločen integral funkcije $t \mapsto f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$. Sedaj je

$$\begin{aligned}
\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt &= G(\beta) - G(\alpha) \\
&= F\big(\varphi(\beta)\big) - F\big(\varphi(\alpha)\big) \\
&= F(b) - F(a) \\
&= \int_a^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

$\square$

Predpostavka v izreku zagotovi, da je kompozicija $f \circ \varphi$ definirana na $[\alpha, \beta]$. Poleg tega je f zvezna. φ' je tudi zvezna, zato je zvezen tudi produkt $(f \circ \varphi) \cdot \varphi'$.

Zgled: Izračunajmo integral

$$\int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin t^2 dt.$$

Vpeljimo novo spremenljivko $x = t^2$. Sledi: $dx = 2tdt$, $tdt = 1/2dx$. Nove meje so: $0 \to 0$ in $\sqrt{\pi} \to \pi$. Torej

$$\begin{aligned}
\int_0^{\sqrt{\pi}} t \sin t^2 dt &= \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{2} dx \\
&= - \left.\frac{\cos x}{2}\right|_0^{\pi} \\
&= \frac{-(-1) - (-1)}{2} \\
&= 1.
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Opomba: V praksi lahko izračunamo integral na levi tudi tako, da najprej izračunamo nedoločeni integral (z uvedbo nove spremenljivke $x = \varphi(t)$). $F(x) = \int_a^b f(x)dx$, sedaj vstavimo $x = \varphi(t)$, dobimo $G(t) = F\big(\varphi(t)\big)$, kar je nedoločeni integral prvotne funkcije t-ja. Sedaj vstavimo prvotne meje α in β.

Po navadi je prva metoda boljša, tj. pri prehodu od t do x izračunamo nove meje, nato lahko na t pozabimo.

V prejšnjem izreku je bila funkcija f zvezna na zalogi vrednosti funkcije φ.

Izrek 61 *Naj bo f integrabilna funkcija na $[a, b]$ in naj bo φ zvezno odvedljiva na $[\alpha, \beta]$. Naj bo $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ in φ naraščajoča na $[\alpha, \beta]$. Tedaj je $t \to f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ integrabilna na $[\alpha, \beta]$ in velja*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt.$$

Dokaz: Naj bo $\mathcal{D} = \{\alpha = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = \beta\}$ delitev intervala $[\alpha, \beta]$ in naj bo $x_i = \varphi(t_i)$. Ker φ narašča, je $\{a = x_0 \leq x_1 \leq \ldots \leq x_n = b\}$ delitev intervala $[a, b]$. $\delta_k = x_k - x_{k-1} \geq 0$, $\eta_k = t_k - t_{k-1} > 0$. Oglejmo si Riemannovo vsoto za $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ na $[\alpha, \beta]$:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} f\big(\varphi(\tau_k)\big)\varphi'(\tau_k)(t_k - t_{k-1}),$$

kjer je $\tau_k \in [t_{k-1}, t_k]$. Naj bo $\varphi(\tau_k) = \xi_k$. Ker je φ naraščajoča, je $\xi_k \in$

$[x_{k-1}, x_k]$. Oglejmo si še Riemannovo vsoto:

$$
\begin{aligned}
(**) \qquad \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) &= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\big(\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})\big) \\
&= \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\left(\frac{\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})}{t_k - t_{k-1}}(t_k - t_{k-1})\right) \\
&\overset{\text{L.I.}}{=} \sum_{k=1}^{n} f\big(\varphi(\tau_k)\big)\varphi'(\overline{\tau}_k)(t_k - t_{k-1}).
\end{aligned}
$$

Tu smo v zadnjem koraku uporabili Lagrangeev izrek na vsakem od intervalov $[t_{k-1}, t_k]$ in dobili $\overline{\tau}_k$, $t_{k-1} < \overline{\tau}_k < t_k$. Odštejemo $(**)$ od $(*)$ in dobimo:

$$\sum_{k=1}^{n} f\big(\varphi(\tau_k)\big)\big(\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\overline{\tau}_k)\big)(t_k - t_{k-1}).$$

Ker je φ' zvezna na $[\alpha, \beta]$, je φ' na $[\alpha, \beta]$ enakomerno zvezna.

Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi enakomerne zveznosti funkcije φ' na $[\alpha, \beta]$, obstaja $\delta > 0$, da je $|\varphi'(\tau) - \varphi'(\overline{\tau})| < \varepsilon$, čim je $|\tau - \overline{\tau}| < \delta$, $\tau, \overline{\tau} \in [\alpha, \beta]$. Naj bo delitev $\mathcal{D}$ tako fina, da bo dolžina najdaljšega intervala manjša od δ. Ker τ_k in $\overline{\tau}_k$ ležita med t_{k-1} in t_k, je $|\varphi'(\tau_k) - \varphi'(\overline{\tau}_k)| < \varepsilon$ za vsak k. Torej je

$$
\begin{aligned}
|(*) - (**)| &\leq \sum_{k=1}^{n} \big|f\big(\varphi(\tau_k)\big)\big|\varepsilon(t_k - t_{k-1}) \\
&\leq \varepsilon M \sum_{k=1}^{n}(t_k - t_{k-1}) \\
&= \varepsilon M(\beta - \alpha),
\end{aligned}
$$

kjer je $M = \sup\{|f(x)|, x \in [a, b]\}$. Torej, če je $\max \eta_k$ dovolj majhen, je $\sum_{k=1}^{n} f\big(\varphi(\tau_k)\big)\varphi'(\tau_k)(t_k - t_{k-1})$ poljubno blizu $\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$, ki je zaradi integrabilnosti poljubno blizu $\int_a^b f(x)dx$. Torej je vsota $(*)$ poljubno blizu $\int_a^b f(x)dx$, če je le delitev $\mathcal{D}$ dovolj fina. Torej je $f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)$ integabilna na $[\alpha, \beta]$ in velja:

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)dt = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Podoben izrek velja, če je φ monotono padajoča. V tem primeru je $a = \varphi(\alpha) \geq b = \varphi(\beta)$

Izrek 62 (Integracija per partes) *Naj bosta u in v zvezno odvedljivi funkciji na $[a,b]$. Tedaj je:*

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = uv\Big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx.$$

Dokaz: Velja: $\big(u(x)v(x)\big)' = u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$ za vse $x \in [a,b]$. Integriramo in dobimo:

$$\int_a^b \big(u(x)v(x)\big)'dx = \int_a^b u'(x)v(x)dx + \int_a^b u(x)v'(x)dx$$

oz.

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = \big(u(b)v(b) - u(a)v(a)\big) - \int_a^b v(x)u'(x)dx.$$

□

Zgled: Izračunajmo integral

$$\int_0^\pi x\sin x dx.$$

Vzemimo

$$u(x) = x, \quad u'(x) = 1$$

$$v'(x) = \sin x, \quad v(x) = -\cos x.$$

Torej

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x\sin x dx &= -x\cos x\Big|_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx\\ &= -x\cos x\Big|_0^\pi + \sin x\Big|_0^\pi\\ &= \pi\end{aligned}$$

◊

Na ta način lahko izračunamo integrale oblike

$$\int_a^b \underbrace{x^n}_{u}\underbrace{f(x)dx}_{dv}$$

pri čemer je lahko funkcija f ena od:

$$\sin,\ \cos,\ \mathrm{tg}, \ldots, e^x, \ldots$$

Z eno integracijo per partes lahko dobimo integral enakega tipa, pri čemer x^n nadomestimo z x^{n-1}. Po n korakih lahko integral izračunamo.

5.9 Izreki o povprečjih

V §5.7 smo definirali povprečje funkcije na intervalu $[a, b]$.

$$\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

Razdelimo interval $[a, b]$ na n enakih delov.

$$x_0 = a,\ x_1 = a + \delta, \ldots,\ x_n = a + n\delta,$$

pri tem je $\delta = (b-a)/n$. Približek za povprečno vrednost je

$$\frac{f(a+\delta) + f(a+2\delta) + \ldots + f(a+n\delta)}{n} \approx$$
$$\approx \frac{1}{b-a}\big[f(a+\delta)\delta + f(a+2\delta)\delta + \ldots + f(a+n\delta)\delta\big],$$

saj je vsota v $[\ldots]$ enaka Riemannovi vsoti za f na $[a, b]$. V limiti je zgornji izraz enak povprečju funkcije f na $[a, b]$.

Izrek 63 *Naj bosta funkciji f, g integrabilni na $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$. Za vsak $x \in [a, b]$ naj bo g povsod istega znaka, tj. ali $g(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$ ali pa $g(x) \leq 0$ za vse $x \in [a, b]$. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx,$$

kjer je μ število, za katerega velja $m \leq \mu \leq M$.

Dokaz: Naj bo $g(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a, b]$. Ker je $m \leq f(x) \leq M$, sledi za vsak $x \in [a, b]$

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x)$$

oz.

$$m\int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M\int_a^b g(x)dx.$$

Če je $\int_a^b g(x)dx = 0$, je tudi $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$, zato je vsak μ dober. Če pa je $\int_a^b g(x)dx \neq 0$, torej $\int_a^b g(x)dx > 0$, pa je

$$m \leq \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} \leq M$$

Če kvocient v sredini označimo z μ, je $m \leq \mu \leq M$ in

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx$$

Podobno dokažemo trditev v izreku, če je $g(x) \leq 0$ za vse $x \in [a, b]$. $\square$

Posledica 30 *Če je v izreku 63 funkcija f zvezna na $[a, b]$, obstaja $\xi \in [a, b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx$$

Dokaz: Zvezna funkcija f na zaprtem intervalu $[a, b]$ zavzame vse vrednosti med $m = \inf f$ in $M = \sup f$, torej zavzame tudi vrednost μ. $\square$

Posledica 31 (posledice 30) *Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b]$. Obstaja $\xi \in [a, b]$, da je*

$$f(\xi) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

Dokaz: Vzamemo $g(x) = 1$ in dobimo

$$\int_a^b f(x) \cdot 1dx = f(\xi)(b - a).$$

$\square$

Izrek 64 *Naj bo funkcija f zvezna na $[a, b]$, g pa nenegativna, padajoča in zvezno odvedljiva na $[a, b]$. Tedaj obstaja $\xi \in [a, b]$, da je*

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a) \int_a^\xi f(x)dx$$

Dokaz: Naj bo F primitivna funkcija funkcije f. Izberimo jo tako, da bo $F(a) = 0$. Torej je $F(x) = \int_a^x f(t)dt$, $x \in [a, b]$. Funkciji F in g sta zvezno odvedljivi (g po predpostavki, F pa, ker je $F' = f$ in f tudi zvezna po predpostavki). Integriramo per partes in dobimo

$$\begin{aligned} (*) \qquad \int_a^b f(x)g(x)dx &= \int_a^b F'(x)g(x)dx \\ &= F(b)g(b) - F(a)g(a) - \int_a^b g'(x)F(x)dx \\ &= F(b)g(b) - \int_a^b g'(x)F(x)dx. \end{aligned}$$

Funkcija g pada, zato je $-g'(x) \geq 0$ za vsak $x \in [a,b]$. Po posledici zgoraj obstaja $\eta \in [a,b]$, da je

$$\begin{aligned}\int_a^b g'(x)F(x)dx &= F(\eta)\int_a^b g'(x)dx \\ &= F(\eta)\big(g(b)-g(a)\big).\end{aligned}$$

Iz $(*)$ naprej sledi

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(\eta)\big(g(b)-g(a)\big) \\ &= F(b)g(b) + F(\eta)\big(g(a)-g(b)\big).\end{aligned}$$

Ker je g nenegativna in padajoča, je $g(b) \geq 0$ in $g(a)-g(b) \geq 0$. Če je torej $m = \min\{F(x) : x \in [a,b]\}$ in $M = \max\{F(x) : x \in [a,b]\}$, je zgornji izraz navzgor omejen z $Mg(b)+M\big(g(a)-g(b)\big) = Mg(a)$ in navzdol omejen z $mg(b)+m\big(g(a)-g(b)\big) = mg(a)$. Torej je

$$mg(a) \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq Mg(a).$$

Če je $g(a)=0$, je v izreku dober vsak ξ. Če pa je $g(a) \neq 0$, torej $g(a) > 0$, pa je po zgornjem $\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx$ število med m in M. Ker F zavzame vsako vrednost med m in M, torej obstaja ξ, $\xi \in [a,b]$, da je

$$\frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx = F(\xi),$$

torej

$$\int_a^\xi f(x)dx = \frac{1}{g(a)}\int_a^b f(x)g(x)dx.$$

□

Zgled: Naj bo $0 < a < b$, $f(x) = \sin x$ in $g(x) = 1/x$. Torej f in g izpolnjujeta pogoje v izreku. Za vsak b torej obstaja ξ, da je

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\sin x}{x}dx &= \frac{1}{a}\int_a^\xi \sin x dx \\ &= -\frac{1}{a}\cos x\Big|_a^\xi \\ &= \frac{1}{a}(\cos a - \cos\xi).\end{aligned}$$

Torej za vsak $b > a$ velja

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq \frac{2}{a}.$$

◊

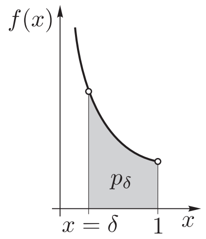
Opomba: Zgornjo neenakost bomo pozneje še uporabili.

5.10 Posplošeni integrali

Pogosto naletimo na vprašanje, kako izračunati integral oblike

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx.$$

Funkcija $x \to 1/\sqrt{x}$ ni omejena na $[0, 1]$. Namreč, ko gre x proti 0, gre funkcijska vrednost $1/\sqrt{x}$ proti ∞. Ta funkcija torej na $[0, 1]$ ni integrabilna.



Slika 5.7: Nepravi integral

Pri tem je

$$\begin{aligned} p_\delta &= \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= \int_\delta^1 x^{-1/2} dx \\ &= \left[2\sqrt{x}\right]_\delta^1 \\ &= 2 - 2\sqrt{\delta}. \end{aligned}$$

In od tod

$$\begin{aligned} p &= \lim_{\delta \to 0} p_\delta \\ &= \lim_{\delta \to 0} (2 - 2\sqrt{\delta}) \\ &= 2. \end{aligned}$$

Integral $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx$ nima običajnega smisla, saj funkcija ni omejena in zato ni integrabilna na $[0,1]$. Vendar bomo definirali

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx := \lim_{\delta \to 0} \int_\delta^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx,$$

ker limita na desni obstaja. Podobno težavo srečamo, ko računamo

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx.$$

Definirali bomo

$$\begin{aligned}
\int_1^\infty \frac{1}{x^2} dx &:= \lim_{A \to \infty} \int_1^A \frac{1}{x^2} dx \\
&= \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^A \\
&= \lim_{A \to \infty} \left[-\frac{1}{A} + \frac{1}{1} \right] \\
&= 1
\end{aligned}$$

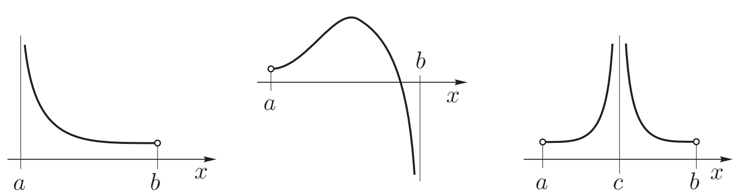
Pojem integrala bomo posplošili na primere, ko funkcija v okolici kakšne točke ne bo omejena, ali ko bo interval, po katerem integriramo, neskončen. Tako definiranemu integralu bomo rekli ***posplošeni integral*** ali ***nepravi integral*** ali ***izlimitirani integral***.

Definicija 86

1. *Naj bo f definirana na $(a,b]$. Funkcija f ni omejena v okolici točke a, če je za vsak $\delta > 0$ f neomejena na intervalu $(a, a+\delta)$.*

2. *Naj bo f definirana na $[a,b)$, f ni omejena v okolici točke b, če je za vsak $\delta > 0$ f neomejena na intervalu $(b-\delta, b)$.*

3. *Naj bo f definirana na $[a,c) \cup (c,b] = [a,b] \setminus \{c\}$. Funkcija f ni omejena v okolici točke c, če je za vsak $\delta > 0$ f neomejena na $(c-\delta, c) \cup (c+\delta, c)$.*



Slika 5.8: Funkcije, ki niso omejene

Če je f integrabilna na $[a,b]$, tedaj je

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$$

in

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a}^{b-\delta} f(x)dx = \int_a^b f(x)dx.$$

To je posledica dejstva, da je za integrabilno funkcijo f funkcija F,

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt,$$

zvezna na $[a,b]$, torej je

$$\lim_{\delta\downarrow 0} F(b-\delta) = F(b),$$

oziroma

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{a}^{b-\delta} f(t)dt = \int_a^b f(t)dt.$$

Podobno velja tudi za drugo limito.

Definicija 87 *Naj bo f definirana na $(a,b]$, naj bo f v okolici točke a neomejena in naj bo f integrabilna na $[a+\delta,b]$, za vsak $\delta>0$. Tedaj definiramo*

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{a+\delta}^{b} f(x)dx,$$

če limita na desni obstaja. Podobno, če je f definirana na $[a,b)$, v okolici točke b neomejena in integrabilna na $[a,b-\delta]$, za vsak $\delta>0$, definiramo

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\delta\downarrow 0}\int_{a}^{b-\delta} f(x)dx,$$

če limita na desni obstaja.

V obeh primerih tako definiranemu izrazu $\int_a^b f(x)dx$ pravimo posplošeni (ali nepravi) integral funkcije f na $[a,b]$. V primeru, da $\int_a^b f(x)dx$ obstaja, pravimo tudi, da posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ konvergira, če pa $\int_a^b f(x)dx$ ne obstaja, pravimo, da posplošeni integral $\int_a^b f(x)dx$ divergira.

Zgled: Poskusimo izračunati naslednji integral.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{dx}{x} &= \lim_{\delta\to 0}\int_\delta^1 \frac{dx}{x}\\ &= \lim_{\delta\to 0}\log|x|\Big|_\delta^1\\ &= \lim_{\delta\to 0}(\log 1-\log\delta)\end{aligned}$$

Ta limita ne obstaja. Integral $\int_0^1 \frac{dx}{x}$ divergira. $\Diamond$

Zgled: Poglejmo, ali

$$\int_0^1 \log x dx$$

konvergira.

Ker je $\int \log x dx = x \log x - x + C$, je

$$\begin{aligned}\int_0^1 \log x dx &= \lim_{\delta \downarrow 0} \int_\delta^1 \log x dx \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} [x \log x - x]_\delta^1 \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} (-1 - \delta \log \delta + \delta).\end{aligned}$$

Ker pa je

$$\begin{aligned}\lim_{\delta \downarrow 0} \delta \log \delta &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\log \delta}{\frac{1}{\delta}} \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} \frac{\frac{1}{\delta}}{-\frac{1}{\delta^2}} \\ &= \lim_{\delta \downarrow 0} (-\delta) = 0,\end{aligned}$$

$\int_0^1 \log x dx$ obstaja in je enak -1. $\Diamond$

Če poznamo primitivno funkcijo funkcije f, je torej

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &= \lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^b f(x)dx \\ &= \lim_{\delta \to 0} \big(F(b) - F(a+\delta)\big)\end{aligned}$$

in torej integral konvergira, če obstaja limita

$$\lim_{\delta \to 0} F(a+\delta).$$

Kaj pa, če primitivne funkcije ne poznamo? Za nekatere posebne primere posplošenih integralov že vnaprej vemo, kdaj konvergirajo. Opišimo jih.

Izrek 65 *Naj bo funkcija g zvezna na $[a, b]$. Tedaj*

$$\int_a^b \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx$$

obstaja, če je $s < 1$. Če pa je $s \geq 1$ in $g(a) \neq 0$, integral ne obstaja, tj. ta integral divergira.

Dokaz: Pišimo $x = a + t^n$, $n \in \mathbb{N}$ in $dx = nt^{n-1}dt$.

$$\int_{a+\delta}^{b} \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx = n \int_{\sqrt[n]{\delta}}^{\sqrt[n]{b-a}} g(a+t^n) t^{n-ns-1} dt$$

Naj bo najprej $s < 1$. Izberimo si n tako velik, da je $n - ns - 1 > 0$. Tedaj je integrand zvezen na $[0, \sqrt[n]{b-a}]$. Zaradi zveznosti njegove primitivne funkcije Φ na $[0, \sqrt[n]{b-a}]$ obstaja torej limita izraza na desni, tj.

$$\lim_{\delta \downarrow 0} \left(\Phi(\sqrt[n]{b-a}) - \Phi(\sqrt[n]{\delta}) \right) = \Phi(\sqrt[n]{b-a}) - \Phi(0).$$

Integral torej konvergira. Naj bo sedaj $s \geq 1$ in npr. $g(a) > 0$. Ker je g zvezna, je $g(x) \geq 1/2 g(a) = m > 0$ na nekem intervalu $[a, a+\eta]$. Če je $0 < \delta < \eta$, je

$$\begin{aligned} \int_{a+\delta}^{a+\eta} \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx &\geq m \int_{a+\delta}^{a+\eta} \frac{dx}{x-a} \\ &= m \log|x-a| \Big|_{a+\delta}^{a+\eta} \\ &= m(\log \eta - \log \delta) \end{aligned}$$

Limita

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{a+\eta} \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx$$

torej ne obstaja, zato tudi limita

$$\lim_{\delta \to 0} \int_{a+\delta}^{b} \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx = \lim \left[\int_{a+\delta}^{a+\eta} + \int_{a+\eta}^{b} \frac{g(x)}{(x-a)^s} dx \right]$$

ne obstaja, torej integral divergira. □

Opomba: Analogen izrek velja za

$$\int_{a}^{b} \frac{g(x)}{(b-x)^s} dx.$$

Zgled: Ali integral

$$\int_{0}^{1} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$$

obstaja?

Pišimo $g(x) = \cos x$. Da, ker je g zvezna na $[0,1]$ in $s = \frac{1}{2} < 1$. $\Diamond$

Zgled: Ali integral

$$\int_0^1 \frac{\cos x}{x} dx$$

obstaja?

Pišimo $g(x) = \cos x$. Ne, ker je g zvezna na $[0,1]$ in $g(0) = 1 \neq 0$ in $s = 1 \geq 1$. $\Diamond$

Zgled: Ali integral

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x^{\frac{3}{2}}} dx$$

obstaja?

Pišimo $g(x) = \frac{\sin x}{x}$. Ker je $\lim_{x \downarrow 0} g(x) = 1$, lahko g dodefiniramo v 0 kot $g(0) = 1$ in dobimo zvezno funkcijo na $[0,1]$. Integral prepišemo v

$$\int_0^1 \frac{g(x)}{x^{\frac{1}{2}}} dx.$$

Ker je $s = \frac{1}{2} < 1$, integral obstaja. $\Diamond$

Definicija 88 *Če je $c \in (a,b)$, če je f neomejena v okolici točke c in za vsak $\delta > 0$ f integrabilna na $[a, c-\delta]$ in $[c+\delta, b]$, tedaj je*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int_a^{c-\delta} f(x)dx + \lim_{\tau \to 0} \int_{c+\tau}^b f(x)dx.
\end{aligned}$$

Zgled: Poskusimo izračunati naslednji integral.

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 \frac{dx}{x} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{x} + \int_0^1 \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \int_{-1}^{0-\delta} \frac{dx}{x} + \lim_{\tau \to 0} \int_{0+\tau}^1 \frac{dx}{x} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \log|x| \Big|_{-1}^{-\delta} + \lim_{\tau \to 0} \log|x| \Big|_{\tau}^{1} \\
&= \lim_{\delta \to 0} \log|\delta| - \lim_{\tau \to 0} \log|\tau|
\end{aligned}$$

Nobena od limit ne obstaja. To pomeni, da integral $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x}$ divergira. ◊

Včasih, ko je funkcija neomejena v okolici točke c, $\int_a^b f(x)dx$ ne obstaja, kot npr. v zgornjem zgledu, obstaja pa

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right),$$

imenujemo to limito ***Cauchyjeva glavna vrednost*** in pišemo

$$\lim_{\delta\to 0}\left(\int_a^{c-\delta} f(x)dx + \int_{c+\delta}^{b} f(x)dx\right) = v.p.\int_a^b f(x)dx.$$

Zgled: Oglejmo si integral:

$$\begin{aligned} v.p.\int_{-1}^{1}\frac{dx}{x} &= \lim_{\delta\to 0}\left[\int_{-1}^{-\delta}\frac{dx}{x} + \int_{\delta}^{1}\frac{dx}{x}\right] \\ &= \lim_{\delta\to 0}\left(\log|x|\Big|_{-1}^{-\delta} + \log|x|\Big|_{\delta}^{1}\right) \\ &= \lim_{\delta\to 0}(\log\delta - 0 + 0 - \log\delta) \\ &= 0 \end{aligned}$$

◊

Definicija 89 *Naj bo f definirana na $[a,\infty)$, naj bo integrabilna na vsakem končnem intervalu $[a,b]$. Tedaj je*

$$\int_a^{\infty} f(x)dx := \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

če seveda limita obstaja. Podobno velja za

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx := \lim_{a\to -\infty}\int_a^b f(x)dx,$$

za f definirano na $(-\infty, b]$.

Zgled: Oglejmo si integral:

$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x}dx &= \lim_{b\to\infty}\int_1^b e^{-x}dx \\ &= \lim_{b\to\infty} -e^{-x}\Big|_1^b \\ &= \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + e^{-1}) \\ &= e^{-1}. \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Vemo, da $\int_a^\infty f(x)dx$ obstaja, če obstaja $\lim_{b\to\infty}\Phi(b)$, kjer je

$$\Phi(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

Vemo, da $\lim_{b\to\infty}\Phi(b)$ obstaja natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja B, da je

$$\left|\Phi(b) - \Phi(b')\right| < \varepsilon,$$

za vsak $b, b' > B$. V našem primeru

$$\begin{aligned}\Phi(b) - \Phi(b') &= \int_a^b f(x)dx - \int_a^{b'} f(x)dx \\ &= \int_{b'}^b f(x)dx.\end{aligned}$$

Naslednji izrek je posledica znanega dejstva, da za funkcijo G, definirano na $[a,\infty)$, limita $\lim_{x\to\infty} G(x)$ obstaja natanko takrat, ko je izpolnjen Cauchyjev pogoj, tj., ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $B < \infty$, da je

$$|G(b) - G(b')| < \varepsilon \quad \text{za vse} \quad b > B,\ b' > B.$$

Za našo funkcijo G vzamemo

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Izrek 66 *Naj bo $a \in \mathbb{R}$ in naj bo f integrabilna na vsakem intervalu $[a,b]$, $a < b < \infty$.*

$$\int_a^\infty f(x)dx$$

obstaja natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$, obstaja $B < \infty$, da je

$$\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| < \varepsilon,$$

za vse $b, b' > B$.

Zgled: Pokažimo, da obstaja $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x}dx$. Če je $b' > b > 1$, smo v prejšnjem poglavju pokazali, da za vsak $b' > b$ velja

$$\left|\int_b^{b'} \frac{\sin x}{x}dx\right| \leq \frac{2}{b}.$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko izberemo B tako, da bo

$$\left| \int_b^{b'} \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon,$$

za vse $b, b' > B$. Vzeti je potrebno $2/B < \varepsilon$. Po izreku integral obstaja. □

Izrek 67 *Naj bo g zvezna in omejena funkcija na $[a, \infty)$. Integral*

$$\int_a^\infty \frac{g(x)}{x^s} dx, \qquad a > 0,$$

obstaja, če je $s > 1$. Če je za nek $c < \infty$, $g(x) \geq m > 0$ ali $g(x) \leq -m < 0$, za vsak $x > c$ in če je $s \leq 1$, integral ne obstaja.

Dokaz: Naj bo $|g(x)| \leq M$, $x \geq a$, in naj bo $s > 1$. Tedaj je

$$\begin{aligned} \left| \int_b^{b'} \frac{g(x)}{x^s} dx \right| &\leq M \int_b^{b'} \frac{dx}{x^s} \\ &= M \frac{1}{s-1} \left[\frac{1}{b^{s-1}} - \frac{1}{(b')^{s-1}} \right] \\ &\leq M \frac{1}{s-1} \frac{1}{b^{s-1}}. \end{aligned}$$

Torej za vsak $\varepsilon > 0$ lahko najdemo $B < \infty$, da bo za vsaka $b, b' > B$ veljalo

$$\left| \int_b^{b'} \frac{g(x)}{x^s} dx \right| < \varepsilon.$$

B izberemo iz pogoja $M \cdot 1/(s-1) \cdot 1/B^{s-1} < \varepsilon$. Po prejšnjem izreku integral res konvergira.

Naj bo $g(x) \geq m > 0$ za $x \geq c$. Brez izgube splošnosti privzamemo, da je $c > 1$. Naj bo $s \leq 1$. Za velike b je

$$\int_a^b \frac{g(x)}{x^s} dx = \int_a^c \frac{g(x)}{x^s} dx + \int_c^b \frac{g(x)}{x^s} dx$$

$$\begin{aligned} \int_c^b \frac{g(x)}{x^s} dx &\geq \int_c^b \frac{m}{x^s} dx \\ &= \int_c^b m \frac{1}{x^s} dx \\ &\geq m \int_c^b \frac{1}{x} dx \\ &= m \log x \Big|_c^b \\ &= m(\log b - \log c). \end{aligned}$$

Ker gre za $b \to \infty$, izraz $\log b \to \infty$, sledi, da desna stran konvergira k $+\infty$ in zato pri $b \to \infty$ izraz $\int_c^b g(x)/x^s dx$ nima limite. Zato tudi $\int_a^b g(x)/x^s dx$ nima limite, za $b \to \infty$. Integral torej ne obstaja. Podobno velja pri $g(x) \leq -m < 0$ na $[c, \infty)$. □

Zgled: Ali integral

$$\int_2^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx$$

konvergira?

Težava je v tem, da funkcija log v ∞ ni omejena, saj ko gre $x \to \infty$, gre $\log x \to \infty$. Integral prepišemo v obliko, ki ustreza zgornjemu izreku.

$$\begin{aligned}\int_2^\infty \frac{\log x}{1+x^2} dx &= \int_2^\infty \frac{\log x}{(1+x^{-2})x\sqrt{x}\sqrt{x}} dx \\ &= \int_2^\infty \frac{\varphi(x)}{x^\alpha} dx\end{aligned}$$

Pri tem je $\varphi(x) = \log x/\big((1+x^{-2})\sqrt{x}\big)$ in $x^\alpha = x\sqrt{x} = x^{3/2}$. $\alpha = 3/2 > 1$, preverimo še, ali je φ omejena, ko $x \to \infty$.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \varphi(x) &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{(1+x^{-2})\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{\log x}{\sqrt{x}+x^{-2}\sqrt{x}} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{x^{-1}(\cdot 2x^{1/2})}{(1/2x^{-1/2} - 3/2x^{-5/2})(\cdot 2x^{1/2})} \\ &= \lim_{x\to\infty} \frac{2x^{-1/2}}{1-3x^{-2}} \\ &= 0\end{aligned}$$

Ker je $\alpha > 1$ in φ omejena, ko $x \to \infty$, integral po zgornjem izreku obstaja.

◊

5.10.1 Eulerjeva Γ-funkcija

Oglejmo si integral

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

Integrand je zvezen na $(0, \infty)$. Če je $s \geq 1$, je zvezen tudi v točki 0. Pišimo

$$\Gamma(s) = \int_0^1 x^{s-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{s-1} e^{-x} dx$$

Po izreku 65 prvi integral obstaja natanko tedaj, ko je $s > 0$. Pišimo

$$x^{s-1}e^{-x} = \frac{x^{s+1}e^{-x}}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

Ker e^{-x} pada hitreje kot vsaka potenca, vemo, da je $\lim_{x\to\infty} x^{s+1}e^{-x} = 0$, torej $\lim_{x\to\infty} g(x) = 0$. Torej je g omejena na $[1,\infty)$. Po izreku 67, $\int_1^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ obstaja za vsak s. Torej integral $\Gamma(s) = \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx$ obstaja za vsak $s > 0$. Funkcijo $s \mapsto \Gamma(s)$, $s > 0$, imenujemo ***Eulerjeva*** Γ***-funkcija***. Ker je

$$\begin{aligned}
\Gamma(s) &= \int_0^\infty x^{s-1}e^{-x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A x^{s-1}e^{-x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \frac{x^s}{s}e^{-x}\Big|_0^A + \frac{1}{s}\int_0^\infty x^s e^{-x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \frac{A^s e^{-A}}{s} + \frac{1}{s}\Gamma(s+1) \\
&= 0 + \frac{1}{s}\Gamma(s+1) \\
&= \frac{1}{s}\Gamma(s+1),
\end{aligned}$$

velja

$$(*) \quad \Gamma(s+1) = s\Gamma(s) \quad \text{za vsak } \ s > 0.$$

Ker je

$$\begin{aligned}
\Gamma(1) &= \int_0^\infty e^{-x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} \int_0^A e^{-x}dx \\
&= \lim_{A\to\infty} -e^{-x}\Big|_0^A \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[-e^{-A} + 1\right] \\
&= 1,
\end{aligned}$$

iz (*) in $\Gamma(1) = 1$ sledi: $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, $\Gamma(4) = 3\Gamma(3) = 6, \ldots$ Za $n \in \mathbb{N}$ torej velja $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Funkcija Γ torej razširi funkcijo $n \mapsto (n-1)!$ na vsa pozitivna realna števila, tako da $s\Gamma(s) = \Gamma(s+1)$, posplošitev enakosti $n(n-1)! = n!$, velja za vsak pozitiven realen s.

5.10.2 Absolutna konvergenca integrala

Naj bo f takšna funkcija na $[a, \infty)$, za katero $\int_a^b f(x)dx$ obstaja za vsak b, $a < b < \infty$. Tedaj seveda tudi $\int_a^b |f(x)|dx$ obstaja za vsak b, $a < b < \infty$.

Definicija 90 *Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ se imenuje absolutno konvergenten, če konvergira integral $\int_a^\infty |f(x)|dx$.*

Izrek 68 *Če integral $\int_a^\infty f(x)dx$ absolutno konvergira, tedaj konvergira v smislu običajne definicije.*

Dokaz: ...Pomagamo si z $\left|\int_b^{b'} f(x)dx\right| \leq \int_b^{b'} |f(x)|dx$. □

5.11 Uporaba integrala v geometriji

5.11.1 Dolžina poti

Pot v ravnini je zvezna preslikava $F : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$, kjer je $\mathcal{I}$ nek zaprt interval. Podana je s parom zveznih funkcij $f, g : \mathcal{I} \to \mathbb{R}^2$, pri čemer je $x = f(t)$, $y = g(t)$, $t \in I$. ***Tir (sled) poti*** F je

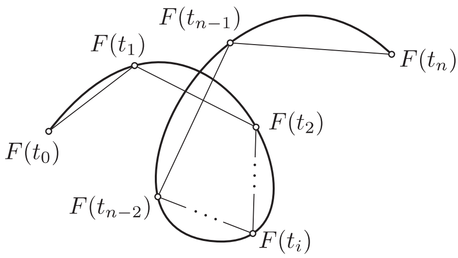
$$\begin{aligned} F(\mathcal{I}) &= \big\{F(t) : t \in \mathcal{I}\big\} \\ &= \big\{\big(f(t), g(t)\big) : t \in \mathcal{I}\big\}. \end{aligned}$$

Naj bo d razdalja v ravnini. Razdaljo med točkama T_1 in T_2 bomo označili z $d(T_1, T_2)$. Izračunali, pravzaprav definirali bi radi ***dolžino poti*** F. Če ima dolžina kakšen smisel, bomo približek za dolžino dobili takole:

$$\mathcal{I} = [a, b],$$

$$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_{n-1} < t_n = b,$$

$$\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}.$$



Slika 5.9: Tir poti v ravnini

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{D}) &= d\big(F(t_0), F(t_1)\big) + d\big(F(t_1), F(t_2)\big) + \ldots + d\big(F(t_{n-1}), F(t_n)\big)\\ &= \sum_{j=1}^{n} d\big(F(t_{j-1}), F(t_j)\big).\end{aligned}$$

je dolžina poligonske črte, ki zaporedoma povezuje točke $F(t_0), F(t_1), \ldots, F(t_n)$.

Izrek 69 *Če je delitev $\mathcal{D}'$ nadaljevanje delitve $\mathcal{D}$, tj. če je $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}'$, tedaj je*

$$\lambda(D') \geq \lambda(D).$$

Dokaz: Dovolj je, da pokažemo, kaj se zgodi, če dodamo eno delilno točko, npr. $t' \in (t_{j-1}, t_j)$, kjer je t' je delilna točka delitve $\mathcal{D}'$.

$$d\big(F(t_{j-1}), F(t_j)\big) \leq d\big(F(t_{j-1}), F(t')\big) + d\big(F(t'), F(t_j)\big)$$

Vsi sumandi vsot $\lambda(D)$ in $\lambda(D')$ so enaki, razen $d\big(F(t_{j-1}), F(t_j)\big)$, ki ga nadomestimo z $d\big(F(t_{j-1}), F(t')\big) + d\big(F(t'), F(t_j)\big)$, torej $\lambda(D') \geq \lambda(D)$. □

Definicija 91 *Pot se imenuje **izmerljiva**, če je*

$$\ell(F) := \sup\{\lambda(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ delitev } I\} < \infty.$$

V tem primeru $\ell(F)$ imenujemo dolžina poti F.

Izrek 70 *Naj bo $F = (f, g) : [a, b] \to \mathbb{R}^2$ **gladka pot**, tj. takšna, da sta funkciji f, g zvezno odvedljivi na $[a, b]$. Tedaj je pot F izmerljiva in velja:*

$$\begin{aligned}\ell(F) &= \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}\,dt\\ &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}\,dt.\end{aligned}$$

Dokaz: Naj bo $\mathcal{D} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ delitev intervala $[a, b]$. Po definiciji je

$$\begin{aligned}\lambda(\mathcal{D}) &= \sum_{i=1}^{n} d\big(F(t_{i-1}), F(t_i)\big) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{\big(f(t_{i-1}) - f(t_i))\big)^2 + \big(g(t_{i-1}) - g(t_i))\big)^2}.\end{aligned}$$

Po Lagrangeevem izreku za vsak $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ obstajata $\xi_i, \eta_i \in (t_{i-1}, t_i)$, da je

$$\begin{aligned}f(t_{i-1}) - f(t_i) &= f'(\xi_i)(t_{i-1} - t_i), \\ g(t_{i-1}) - g(t_i) &= g'(\eta_i)(t_{i-1} - t_i)\end{aligned}$$

in zato velja

$$\lambda(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}(t_{i-1} - t_i), \qquad \xi_i, \eta_i \in [t_{i-1}, t_i].$$

Ta vsota je podobna Riemannovi vsoti.

$$\sigma(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2}(t_{i-1} - t_i), \qquad \tau_i \in [t_{i-1}, t_i]$$

Oglejmo si razliko

$$\sigma(\mathcal{D}) - \lambda(\mathcal{D}) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2} - \sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}\right)(t_{i-1} - t_i).$$

Upoštevali bomo $\sqrt{A} - \sqrt{B} = (A - B)/(\sqrt{A} + \sqrt{B})$. Sledi:

$$\begin{aligned}&|\underbrace{\sqrt{f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2}}_{\sqrt{A}} - \underbrace{\sqrt{f'(\xi_i)^2 + g'(\eta_i)^2}}_{\sqrt{B}}| \\ &= \frac{\big|f'(\tau_i)^2 + g'(\tau_i)^2 - f'(\xi_i)^2 - g'(\eta_i)^2\big|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}} \\ &\leq \frac{|f'(\tau_i) + f'(\xi_i)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}\ |f'(\tau_i) - f'(\xi_i)| + \frac{|g'(\tau_i) + g'(\eta_i)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}\ |g'(\tau_i) - g'(\eta_i)| \\ &\leq \frac{|f'(\tau_i)| + |f'(\xi_i)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}\ |f'(\tau_i) - f'(\xi_i)| + \frac{|g'(\tau_i)| + |g'(\eta_i)|}{\sqrt{A} + \sqrt{B}}\ |g'(\tau_i) - g'(\eta_i)| \\ &\leq 1 \cdot |f'(\tau_i) - f'(\xi_i)| + 1 \cdot |g'(\tau_i) - g'(\eta_i)|\end{aligned}$$

Torej

$$|\sigma(\mathcal{D}) - \lambda(\mathcal{D})| \leq \sum_{i=1}^{n} \left(|f'(\tau_i) - f'(\xi_i)| + |g'(\tau_i) - g'(\eta_i)|\right)(t_{i-1} - t_i)$$

Naj bo $I = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2} dt$. Integrand je zvezen, zato integral obstaja. Dokazali bi radi, da je $I = \ell(F) = \sup \lambda(\mathcal{D})$.

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Obstaja takšen $\delta > 0$, da je $|I - \sigma(\mathcal{D})| < \varepsilon/2$ za vsako delitev $\mathcal{D}$, za katero je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ, saj je $\sigma(\mathcal{D})$ Riemannova vsota za I in hkrati

$$|f'(t) - f'(\tau)| < \varepsilon/\big(4(b-a)\big),$$

za vsaka $t, \tau \in [a, b]$, za katera je $|t - \tau| < \delta$ in

$$|g'(t) - g'(\tau)| < \varepsilon/\big(4(b-a)\big),$$

za vsaka $t, \tau \in [a, b]$, za katera je $|t - \tau| < \delta$, saj sta zaradi zvezne odvedljivosti na $[a, b]$ funkciji f in g tam zvezni in zato enakomerno zvezni. Dobimo

$$\begin{aligned}
|\sigma(\mathcal{D}) - \lambda(\mathcal{D})| &\leq \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\varepsilon}{4(b-a)} + \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \right) (t_{i-1} - t_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \sum_{i=1}^{n} (t_{i-1} - t_i) \\
&= \frac{\varepsilon}{2(b-a)} (b-a) \\
&= \frac{\varepsilon}{2}
\end{aligned}$$

Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev, pri kateri je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ. Tedaj je

$$\begin{aligned}
|I - \lambda(\mathcal{D})| &= |I - \sigma(\mathcal{D}) + \sigma(\mathcal{D}) - \lambda(\mathcal{D})| \\
&\leq |I - \sigma(\mathcal{D})| + |\sigma(\mathcal{D}) - \lambda(\mathcal{D})| \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Torej je $I - \varepsilon < \lambda(\mathcal{D}) < I + \varepsilon$. To velja za vsako delitev $\mathcal{D}$, pri kateri je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ.

Naj bo $\mathcal{D}$ poljubna delitev intervala $[a, b]$. Obstaja nadaljevanje $\mathcal{D}'$ delitve $\mathcal{D}$, da bo dolžina najdaljšega intervala delitve $\mathcal{D}'$ manjša od δ. Po izreku je $\lambda(\mathcal{D}) \leq \lambda(\mathcal{D}')$, po zgornjem pa $\lambda(\mathcal{D}') < I + \varepsilon$. Torej je $\sup_{\mathcal{D}} \lambda(\mathcal{D}) \leq I + \varepsilon$.

Ker je $\lambda(\mathcal{D}) > I - \varepsilon$ za vsako delitev, za katero je dolžina najdaljšega intervala manjša od δ, je $I - \varepsilon \leq \sup \lambda(\mathcal{D}) \leq I + \varepsilon$.

Sklep: Za vsak $\varepsilon > 0$ je $I - \varepsilon \leq \sup\{\lambda(\mathcal{D}) : \mathcal{D} \text{ poljubna delitev}\} \leq I + \varepsilon$. Torej je $\sup \lambda(\mathcal{D}) = I$, oz.

$$\ell(F) = I = \int_a^b \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt.$$

$\square$

Zgled: Izračunaj dolžino krožnice, ki je podana v parametrični obliki

$$\begin{aligned} f(t) &= r \cos t \\ g(t) &= r \sin t \\ t &\in [0, 2\pi). \end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned} \ell &= \int_0^{2\pi} \sqrt{f'(t)^2 + g'(t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2}dt \\ &= \int_0^{2\pi} rdt \\ &= 2\pi r. \end{aligned}$$

$\diamond$

Zgled: Izračunaj dolžino poti med točko, kjer je $x(t) = 0$ do tam, kjer je tangenta na krivuljo, dana z

$$x(t) = \int_1^t \frac{\sin u}{u^2}du \quad \text{in} \quad y(t) = \int_1^t \frac{\cos u}{u^2}du,$$

prvič navpična.

Določimo začetno točko. Vrednost $x(t) = 0$, ko je $t = 1$. Končna točka je tam, kjer je tangenta na krivuljo prvič navpična, tj. $k = \dot{y}/\dot{x} = \infty$.

$$\begin{aligned} k &= \frac{\dot{y}}{\dot{x}} \\ &= \frac{\frac{\cos t}{t^2}}{\frac{\sin t}{t^2}} \\ &= \frac{\cos t}{\sin t} \end{aligned}$$

Tangenta je torej navpična, ko je $\sin t = 0$. Prvič je navpična, ko je $t = \pi$. Sledi:

$$\begin{aligned} \ell &= \int_1^\pi \sqrt{\frac{\sin^2 t}{t^4} + \frac{\cos^2 t}{t^4}} dt \\ &= \int_1^\pi \sqrt{\frac{1}{t^4}} dt \\ &= \int_1^\pi \frac{1}{t^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{t} \right]_1^\pi \\ &= 1 - \frac{1}{\pi} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

Obstajajo takšne poti, da $\ell(F) = \infty$. Predpostavka o odvodih je torej nujna. Posebej grd primer poti je $F : [0, 1] \to \mathbb{R}^2$ takšna, da je $F\big([0, 1]\big) = [0, 1] \times [0, 1]$, tj. „Peanova krivulja".

Spomnimo se, da je ***gladka krivulja*** tir poti $F : [a, b] \to \mathbb{R}^2$, $x = f(t)$, $y = g(t)$, kjer sta funkciji f in g zvezno odvedljivi in je za vsak t, vsaj ena od vrednosti $f'(t)$, $g'(t)$ različna od 0, tj.

$$f'(t)^2 + g'(t)^2 \neq 0.$$

Gladka krivulja ima lahko tudi samopresečne točke, slika 5.9.

Definicija 92 ***Gladek lok*** *je tir poti F kot zgoraj, tj. gladka krivulja, z dodatno lastnostjo, da je F injektivna, tj.*

$$t_1 \neq t_2 \Rightarrow F(t_1) \neq F(t_2),$$

kar pomeni, da nima samopresečnih točk.

Opomba: Takšna preslikava F se imenuje ***regularna parametrizacija*** (hitrost ni nikoli enaka nič) gladkega loka.

$$\mathcal{L} = F([a,b])$$

Pri tem poudarimo, da je lok geometrijski pojem, medtem ko je pot preslikava (torej gibanje). Torej pot = preslikava, tir poti = črta, lok = črta.

Pri splošnih poteh parameter ni nujno čas. Oglejmo si dva posebna primera poti.

Zgled: Naj bo v polarnih koordinatah parameter kar polarni kot.

$$F : [\alpha, \beta] \mapsto \big(f(\varphi), \varphi\big),$$

kjer je f zvezno odvedljiva na $[\alpha, \beta]$. Pokažimo, da velja

$$\ell(F) = \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2} d\varphi.$$

Za $\varphi \in [\alpha, \beta]$ je

$$\begin{aligned} x &= f(\varphi)\cos\varphi \\ \dot{x} &= \frac{dx}{d\varphi} = f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi \end{aligned}$$

in

$$\begin{aligned} y &= f(\varphi)\sin\varphi \\ \dot{y} &= \frac{dy}{d\varphi} = f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi. \end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned} \dot{x}^2 + \dot{y}^2 &= \big(f'(\varphi)\cos\varphi - f(\varphi)\sin\varphi\big)^2 + \big(f'(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)\cos\varphi\big)^2 \\ &= f'(\varphi)^2\cos^2\varphi - 2f'(\varphi)\cos\varphi f(\varphi)\sin\varphi + f(\varphi)^2\sin^2\varphi + \\ &\quad + f'(\varphi)^2\sin^2\varphi + 2f'(\varphi)\sin\varphi f(\varphi)\cos\varphi + f(\varphi)^2\cos^2\varphi \\ &= f(\varphi)^2 + f'(\varphi)^2. \end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned}\ell(F) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}d\varphi \\ &= \int_\alpha^\beta \sqrt{f(\varphi)^2+f'(\varphi)^2}d\varphi.\end{aligned}$$

$\Diamond$

Zgled: Naj bo parameter kar x.

$$F : [a,b] \mapsto \big(x, f(x)\big),$$

pri čemer je f gladka funkcija, tj. zvezno odvedljiva. Pokazali bomo, da je

$$l(F) = \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.$$

Za $x \in [a,b]$ je

$$\begin{aligned} x &= x, & \dot{x} &= 1 \\ y &= f(x), & \dot{y} &= f'(x)\end{aligned}$$

Torej

$$\begin{aligned} l(F) &= \int_a^b \sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}dx \\ &= \int_a^b \sqrt{1+f'(x)^2}dx.\end{aligned}$$

$\Diamond$

Naj bo $\mathcal{L} = F(\mathcal{I})$ gladek lok v ravnini, kjer je F njegova regularna parametrizacija. Dolžino loka $\ell(L)$ bomo definirali kot dolžino $\ell(F)$ poti F. Da bo takšna definicija dolžine loka dobra, potrebujemo naslednji izrek;

Izrek 71 *Naj bo $\mathcal{L}$ gladek lok v ravnini in naj bosta F_1 in F_2 dve regularni parametrizaciji tega loka. Tedaj je*

$$\ell(F_1) = \ell(F_2).$$

Skica dokaza: Naj bosta $F_1 : I = [\alpha, \beta] \to \mathcal{L}$, podana z $F_1(t) = \big(x_1(t), y_1(t)\big)$ in $F_2 : I' = [\alpha', \beta'] \to \mathcal{L}$, podana z $F_2(t) = \big(x_2(t), y_2(t)\big)$ dve regularni parametrizaciji istega loka. Definirajmo $\varphi = F_1^{-1} \circ F_2$, $\varphi : [\alpha', \beta'] \to [\alpha, \beta]$. To moremo, saj sta F_1 in F_2 bijekciji. Preprosto je mogoče dokazati, da je φ zvezno odvedljiva bijekcija, katere odvod je različen od 0 za vsak $t \in [\alpha, \beta]$. Jasno je $F_2 = F_1 \circ \varphi$, torej je $x_2(t) = x_1\big(\varphi(t)\big)$ in $y_2(t) = y_1\big(\varphi(t)\big)$. Uporabimo substitucijo $t = \varphi(\tau)$, $dt = \varphi'(\tau)d\tau$ in pišemo:

$$\begin{aligned}
\ell(F_1) &= \int_\alpha^\beta \sqrt{\dot{x}_1(t)^2 + \dot{y}_1(t)^2}dt \\
&= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\dot{x}_1\big(\varphi(\tau)\big)^2 + \dot{y}_1\big(\varphi(\tau)\big)^2}\varphi'(\tau)d\tau = (*)
\end{aligned}$$

Upoštevamo, da velja ali $\varphi' > 0$ povsod na $[\alpha', \beta']$ ali $\varphi' < 0$ povsod na $[\alpha', \beta']$. Privzeli bomo $\varphi' > 0$ povsod na $[\alpha', \beta']$ in uporabili

$$\begin{aligned}
\dot{x}_2(\tau) &= \dot{x}_1\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau), \\
\dot{y}_2(\tau) &= \dot{y}_1\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau).
\end{aligned}$$

Sledi:

$$\begin{aligned}
(*) &= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\big[\dot{x}_1\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)\big]^2 + \big[\dot{y}_1\big(\varphi(\tau)\big)\varphi'(\tau)\big]^2}d\tau \\
&= \int_{\alpha'}^{\beta'} \sqrt{\dot{x}_2(\tau)^2 + \dot{y}_2(\tau)^2}d\tau \\
&= \ell(F_2)
\end{aligned}$$

$\square$

Naravna parametrizacija gladkega loka

Naj bo $F : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ regularna parametrizacija gladkega loka $\mathcal{L} = F([\alpha, \beta])$. Oglejmo si funkcijo φ,

$$\varphi(t) = \int_\alpha^t \sqrt{\dot{x}(\tau)^2 + \dot{y}(\tau)^2}d\tau.$$

$\varphi(t)$ je torej dolžina dela loka $\mathcal{L}$ med točkama $F(\alpha)$ in $F(t)$. Ker je

$$\frac{d\varphi}{dt} = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2} > 0,$$

sledi, da je φ zvezno odvedljiva, strogo naraščajoča funkcija $[\alpha,\beta] \to [0,\ell(\mathcal{L})]$.

Naj bo $\varphi^{-1} : s \mapsto \varphi^{-1}(s)$ njen inverz, torej funkcija z $[0,\ell(\mathcal{L})] \to [\alpha,\beta]$. Tudi ta je zvezna odvedljiva. Oglejmo si novo parametrizacijo loka $\mathcal{L}$:

$$G = F \circ \varphi^{-1} : [0,\ell(\mathcal{L})] \to \mathcal{L} \equiv \big(g_1(s), g_2(s)\big), \quad s = \varphi(t).$$

V tej parametrizaciji je:

$$\begin{aligned} g_1'(s)^2 + g_2'(s)^2 &= \left[\frac{dx}{dt}\big(\varphi^{-1}(s)\big)\frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{dt}(t)^2 + \frac{dy}{dt}(t)^2}}\right]^2 + \\ &\quad + \left[\frac{dy}{dt}\big(\varphi^{-1}(s)\big)\frac{1}{\sqrt{\frac{dx}{dt}(t)^2 + \frac{dy}{dt}(t)^2}}\right]^2 \\ &= 1. \end{aligned}$$

V tej novi parametrizaciji:

$$s \mapsto \big(g_1(s), g_2(s)\big), \qquad 0 \le s \le \ell(\mathcal{L})$$

je

$$\int_0^s \sqrt{g_1'(\tau)^2 + g_2'(\tau)^2}\, d\tau = \int_0^s 1 d\tau = s$$

Torej v novi parametrizaciji G je dolžina loka od $G(0)$ do $G(s)$ enaka s. Takšnemu parametru s pravimo ***naravni parameter***. (Lok je parametriziran kar z dolžino svojega delnega loka). Za ***naravno parametrizacijo*** $G = (g_1, g_2)$ velja $g_1'(t)^2 + g_2'(t)^2 = 1$.

Izračunajmo še diferencial funkcije φ, $s = \varphi(t)$.

$$\begin{aligned} ds &= d\varphi(t) \\ &= \varphi'(t)dt \\ &= \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2}dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ds^2 &= (\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2)(dt)^2 \\ &= (dx)^2 + (dy)^2. \end{aligned}$$

V polarnih koordinatah dobimo $(ds)^2 = (dr)^2 + r^2(d\varphi)^2$, če pa je parameter x, dobimo:

$$\begin{aligned}(ds)^2 &= (dx)^2 + (dy)^2 \\ &= dx^2 + \big(f'(x)\big)^2 (dx)^2 \\ &= \left[1 + \big(f'(x)\big)^2\right] (dx)^2.\end{aligned}$$

Zgled: Izračunaj obseg kardioide $r = a(1 + \cos\varphi)$.

$$\begin{aligned}\ell &= 2\int_0^\pi \sqrt{r(\varphi)^2 + r'(\varphi)^2} d\varphi \\ &= 2\int_0^\pi \sqrt{(a + a\cos\varphi)^2 + (-a\sin\varphi)^2} d\varphi \\ &= 2\int_0^\pi \sqrt{a^2 + 2a^2\cos\varphi + a^2\cos^2\varphi + a^2\sin^2\varphi} d\varphi \\ &= 2a\int_0^\pi \sqrt{2 + 2\cos\varphi} d\varphi \\ &= 2a\int_0^\pi 2\cos\frac{\varphi}{2} d\varphi \\ &= 4a \cdot 2\left[\sin\frac{\varphi}{2}\right]_0^\pi \\ &= 8a\end{aligned}$$

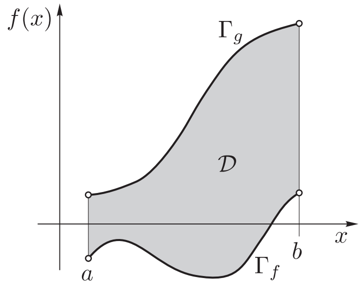
$\diamondsuit$

5.12 Ploščine likov v ravnini

5.12.1 Ploščina lika med grafoma zveznih funkcij

Naj bosta dani zvezni funkcji f in g, za kateri velja: $f(x) \leq g(x)$, $a \leq x \leq b$. Naj bo

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}$$



Slika 5.10: Ploščina lika v ravnini

Izračunali bi radi ploščino $p(\mathcal{D})$. Približek za ploščino najdemo tako, da interval $[a, b]$ razrežemo na n delov: $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, v vsakem delu izberemo točko $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ in zapišemo

$$\big(g(\xi_1) - f(\xi_1)\big)(x_1 - x_0) + \big(g(\xi_2) - f(\xi_2)\big)(x_2 - x_1) + \ldots + \\ + \big(g(\xi_n) - f(\xi_n)\big)(x_n - x_{n-1}) = \sum_{k=1}^{n} \big(g(\xi_k) - f(\xi_k)\big)\delta_k,$$

torej izračunamo ploščino stopničastega lika, ki aproksimira $\mathcal{D}$ (kar je ravno Riemannova vsota za funkcijo $g - f$). V limiti dobimo

$$p(\mathcal{D}) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx.$$

Zgornje povzamemo v naslednjem izreku

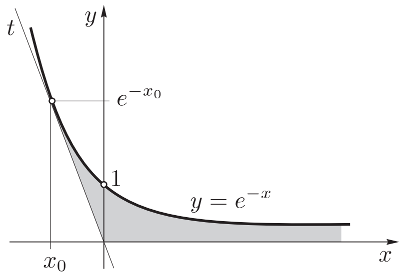
Definicija 93 *Naj bosta f, g zvezni funkciji na $[a, b]$ in $f(x) \leq g(x)$, $x \in [a, b]$. Naj bo*

$$\mathcal{D} = \{(x, y) : f(x) \leq y \leq g(x),\ a \leq x \leq b\}.$$

Ploščina $\mathcal{D}$ je:

$$p(\mathcal{D}) = \int_a^b \big(g(x) - f(x)\big)dx$$

Zgled: Izračunajmo ploščino območja, omejenega s krivuljo, ki je podana z enačbo $y = e^{-x}$, tangento t na krivuljo, ki poteka skozi izhodišče, in abscisno osjo.



Slika 5.11: Območje omejeno z $y = e^{-x}$, t in absciso

Ploščina območja je

$$p = \int_{x_0}^{\infty} e^{-x} dx - \frac{|x_0| e^{-x_0}}{2}.$$

Parametrizacija krivulje $f(x) = x_0$, $g(x) = e^{-x_0}$ in enačba tangente na krivuljo:

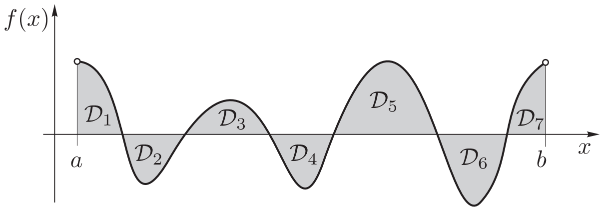
$$(x - x_0)(-e^{-x_0}) = y - e^{-x_0}$$
$$y = -xe^{-x_0} + x_0 e^{-x_0} + e^{-x_0}.$$

Tangenta gre skozi izhodišče $(0, 0)$, zato $x_0 e^{-x_0} + e^{-x_0} = 0$, od koder naprej sledi $x_0 = -1$. Enačba tangente je tako: $y = -ex$. Torej

$$\begin{aligned} p &= \int_{-1}^{\infty} e^{-x} dx - \frac{e}{2} \\ &= \lim_{B\to\infty} \int_{-1}^{B} e^{-x} dx - \frac{e}{2} \\ &= \lim_{B\to\infty} \big[- e^{-x} \big]_{-1}^{B} - \frac{e}{2} \\ &= \lim_{B\to\infty} \big[- e^{-B} + e \big] - \frac{e}{2} \\ &= \frac{e}{2} \end{aligned}$$

$\diamondsuit$

5.12.2 Grafični pomen določenega integrala



Slika 5.12: Grafični pomen določenega integrala

Če je f na $[a,b] \geq 0$, je

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b \big(f(x) - 0\big)dx.$$

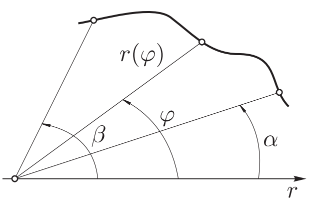
Če je f na $[a,b] \leq 0$, je

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b \big(0 - f(x)\big)dx.$$

Torej

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}) &= \int_a^b f(x)dx \\ &= p(\mathcal{D}_1) + p(\mathcal{D}_3) + p(\mathcal{D}_5) + p(\mathcal{D}_7) - \big(p(\mathcal{D}_2) + p(\mathcal{D}_4) + p(\mathcal{D}_6)\big). \end{aligned}$$

5.12.3 Ploščina izseka, ko je krivulja dana v polarnih koordinatah



Slika 5.13: Ploščina krožnega izseka

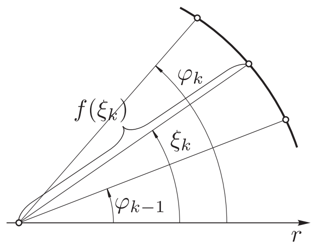
Izrek 72 *Naj bo f zvezna pozitivna funkcija na $[\alpha,\beta]$, kjer je $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 2\pi$. Naj bo*

$$\mathcal{D} = \{(r,\varphi) : 0 \leq r \leq f(\varphi),\ \alpha \leq \varphi \leq \beta\}.$$

Tedaj je ploščina $p(\mathcal{D})$ *enaka*

$$p(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^2 d\varphi.$$

Dokaz: Razdelimo $\mathcal{D}$ na n-delov, $\alpha = \varphi_0 < \varphi_1 < \ldots < \varphi_n = \beta$.



Slika 5.14: k-ti del krožnega izseka

Približna ploščina krožnega izseka z odprtino $\varphi_k - \varphi_{k-1}$ in polmerom $f(\xi_k)$ je

$$p_k = \frac{f(\xi_k)(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{2} f(\xi_k)$$

Celotna ploščina stopničastega lika iz krožnih izsekov, ki aproksimira $\mathcal{D}$, je torej

$$\begin{aligned} p &= \sum_{k=1}^{n} p_k \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{2} f(\xi_k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{f(\xi_k)^2(\varphi_k - \varphi_{k-1})}{2}, \end{aligned}$$

kar pa je v bistvu Riemannova vsota za funkcijo $\frac{1}{2}f^2$ na intervalu $[\alpha, \beta]$. V limiti dobimo

$$p(\mathcal{D}) = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi)^2 d\varphi.$$

$\square$

Zgled: Izračunaj ploščino lika omejenega s pentljo, ki je podana z enačbo

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\varphi, \quad a > 0.$$

Definirana je na odsekih $[-\pi/4, \pi/4]$ in $[3\pi/4, 5\pi/4]$, je simetrična glede na izhodišče in je podobna dvoperesni deteljici.

$$\begin{aligned}
p &= 2 \cdot \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} 2a^2 \cos 2\varphi d\varphi \\
&= 2a^2 \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos 2\varphi d\varphi \\
&= 2a^2 \cdot (1/2) \cdot \big(\sin(2\pi/4) - \sin(-2\pi/4)\big) \\
&= 2a^2
\end{aligned}$$

$\Diamond$

Tabela 5.1: Nedoločeni integrali elementarnih funkcij

funkcija $x \mapsto f(x) =$	nedoločeni integral $x \mapsto \int f(x)dx =$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C$
$1/x$	$\log x + C$
$\log x$	$-x + x\log x + C$
a^x	$\dfrac{a^x}{\log(a)} + C$
$\sin x$	$-\cos x + C$
$\cos x$	$\sin x + C$
$\operatorname{tg} x$	$-\log\cos x + C$
$\operatorname{ctg} x$	$\log\sin x + C$
$\arcsin x$	$x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$
$\arccos x$	$x\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C$
$\operatorname{arctg} x$	$x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + C$
$\operatorname{arcctg} x$	$x\operatorname{arcctg} x + \frac{1}{2}\log\left(x^2+1\right) + C$
$\operatorname{sh} x$	$\operatorname{ch} x + C$
$\operatorname{ch} x$	$\operatorname{sh} x + C$
$\operatorname{th} x$	$\log(\operatorname{ch} x) + C$
$\operatorname{cth} x$	$\log(\operatorname{sh} x) + C$
$\operatorname{arsh} x$	$x\operatorname{arsh} x - \sqrt{x^2+1} + C$
$\operatorname{arch} x$	$x\operatorname{arch} x - \sqrt{x^2-1} + C$
$\operatorname{arth} x$	$x\operatorname{arth} x + \frac{1}{2}\log\left(x^2-1\right) + C$
$\operatorname{arcth} x$	$x\operatorname{arcth} x + \frac{1}{2}\log\left(x^2-1\right) + C$
$\dfrac{1}{ax^2+b}$	$\dfrac{\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{a}x}{\sqrt{b}}\right)}{\sqrt{a}\,\sqrt{b}} + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+b}}$	$\log(x + \sqrt{x^2+b}) + C$
$\dfrac{1}{\sqrt{1-ax^2}}$	$\dfrac{\arcsin\left(\sqrt{a}x\right)}{\sqrt{a}} + C$

Poglavje 6

Vrste

6.1 Številske vrste

Definicija 94 *Neskončna formalna vsota* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n + \ldots$, *kjer je* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *zaporedje realnih števil, se imenuje (neskončna)* ***številska vrsta****, člen* a_n *pa splošni člen vrste. Številsko vrsto po navadi označimo z*

$$a_1 + a_2 + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Zaporedje $s_1 = a_1,\ s_2 = a_1 + a_2, \ldots,\ s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \ldots$ *imenujemo* ***zaporedje delnih vsot*** *vrste.*

Definicija 95 *Če zaporedje delnih vsot* $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ *konvergira (k limiti* s*), pravimo, da vrsta* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ***konvergira*** *(to pomeni, da „jo je mogoče sešteti”) in ima vsoto* s*. V tem primeru pišemo*

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s$$

ali

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s.$$

Če vrsta ne konvergira, pravimo, da je divergentna ali da divergira.

Zgled: Seštej vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}.$$

Pišimo

$$\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$$

in ugotovimo, da je

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \ldots + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \end{aligned}$$

in zato $\lim s_n = 1$. Vrsta torej konvergira in njena vsota je enaka 1. $\diamondsuit$

Zgled: Ali vrsta $1 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + \ldots$ konvergira? Zapišimo prvih nekaj delnih vsot: $s_1 = 1$, $s_2 = 3/2$, $s_3 = 7/4$, n-ta delna vsota je enaka

$$s_n = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}},$$

torej je

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2.$$

Zaporedje delnih vsot konvergira, vrsta torej konvergira in ima vsoto 2. $\diamondsuit$

Opomba: Zaporedje $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira natanko tedaj, ko izpolnjuje Cauchyjev pogoj, tj. natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|s_m - s_n| < \varepsilon$ za vse $m, n \geq n_0$. Od tod sledi:

Posledica 32 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira natanko takrat, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je*

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

za vse $n \geq n_0$ in vse $p \geq 1$. V posebnem velja: če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira, je

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

Zgled: Oglejmo si primer ***geometrijske vrste***,

$$a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots,$$

z začetnim členom a, $a \neq 0$, in koeficientom q, $q \neq 1$. Zapišimo n-to delno vsoto:

$$\begin{aligned} s_n &= a + aq + aq^2 + \ldots + aq^{n-1} \\ &= a(1 + q + q^2 + \ldots + q^{n-1}) \\ &= a\frac{1-q^n}{1-q}. \end{aligned}$$

- če je $|q| < 1$, tedaj $\lim_{n\to\infty} q^n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{a}{1-q}$, torej

$$a + aq + aq^2 + \ldots = \frac{a}{1-q}.$$

- če je $|q| > 1$, tedaj $\lim_{n\to\infty} q^n \neq 0$, torej vrsta $a + aq + aq^2 + \ldots$ divergira.

- če je $q = 1$ oz. $q = -1$, vrsta $a + aq + aq^2 + \ldots$ divergira.

$\Diamond$

Neposredno iz definicije konvergence sledi naslednji izrek.

Izrek 73 *Če vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergira, tedaj za vsak m konvergira tudi vrsta $a_m + a_{m+1} + \ldots$. Če za nek m konvergira vrsta $a_m + a_{m+1} + \ldots$, tedaj konvergira tudi $a_1 + a_2 + \ldots$.*

Dokaz: Sledi iz definicije konvergence. $\square$

Opomba: Vrsto $a_m + a_{m+1} + \ldots$ imenujemo ***ostanek vrste*** $a_1 + a_2 + \ldots$.

Izrek 74 *Če vrsta $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergira, tedaj za vsak c konvergira tudi vrsta $ca_1 + ca_2 + \ldots$ in velja:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(ca_n) = c\sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Če konvergira tudi vrsta $b_1 + b_2 + \ldots$, tedaj konvergirata tudi vrsti $(a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots$ in $(a_1 - b_1) + (a_2 - b_2) + \ldots$ in je

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \pm b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \pm \sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

Dokaz: (za vsoto). Naj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergirata. Tedaj zaporedji $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ in $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$, $t_n = b_1 + b_2 + \ldots + b_n$ konvergirata. Označimo $s = \lim_{n\to\infty} s_n$ in $t = \lim_{n\to\infty} t_n$. Oglejmo si vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$. Njena n-ta delna vsota je

$$p_n = (a_1 + b_1) + (a_2 + b_2) + \ldots + (a_n + b_n) = s_n + t_n$$

Iz pravil za računanje limit zaporedij sledi: ker $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ in $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergirata, konvergira tudi $\{s_n + t_n\}_{n=1}^{\infty}$. Limita je enaka $s + t$. Torej $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n = s + t$. □

6.2 Vrste z nenegativnimi členi

Naj bo

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \quad \text{kjer je } \ a_j \geq 0 \quad \text{za vsak } j$$

vrsta z nenegativnimi členi. Oglejmo si zaporedje njenih delnih vsot. Opazimo,

$$\begin{aligned} s_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ s_{n+1} &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n + a_{n+1} \\ &= s_n + \underbrace{a_{n+1}}_{\geq 0} \geq s_n \end{aligned}$$

torej je zaporedje delnih vsot naraščajoče. Torej, za vsak n, je $s_{n+1} \geq s_n$. Za takšno zaporedje pa vemo, da konvergira natanko tedaj, ko je navzgor omejeno. Torej velja:

Trditev 36 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ z nenegativnimi členi konvergira natanko tedaj, ko je zaporedje njenih delnih vsot (navzgor) omejeno.*

Zgled: Oglejmo si t.i. ***harmonično vrsto***.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots$$

Vsak njen člen od drugega naprej je harmonična sredina sosednjih, torej

$$\frac{1}{a_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{j-1}} + \frac{1}{a_{j+1}}\right) \quad \text{za vsak } \ j \geq 2.$$

Velja

$$\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\ldots+\frac{1}{m+m}>m\frac{1}{2m}=\frac{1}{2},$$

zato je

$$\underbrace{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}_{>\frac{1}{2},\ 2\text{ člena}}+\underbrace{\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}}_{>\frac{1}{2},\ 4\text{ členi}}+\underbrace{\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\ldots+\frac{1}{16}}_{>\frac{1}{2},\ 8\text{ členov}}+\ldots$$

$$\ldots+\underbrace{\frac{1}{2^{k-1}+1}+\ldots+\frac{1}{2^k}}_{>\frac{1}{2},\ 2^{k-1}\text{ členov}}+\ldots,$$

od koder sledi, da delne vsote ne morejo biti navzgor omejene. Vrsta torej divergira. Naivno vprašanje, koliko členov vrste moramo sešteti, da izračunamo vsoto na npr. tri decimalke natančno, nima smisla. $\Diamond$

Zgled: Analizirajmo konvergenco vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^s}=1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{3^s}+\ldots,$$

kjer je $s\in\mathbb{R}$.

1. Če je $s\le 1$, je $1/n^s\ge 1/n$, torej je za vsak k $\sum_{n=1}^{k}1/n^s\ge\sum_{n=1}^{k}1/n$. Ker delne vsote harmonične vrste niso nazvgor omejene sledi, da tudi delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ niso navzgor omejene, torej vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}1/n^s$ divergira.

2. Naj bo $s>1$, tj. $s=1+\sigma$, $\sigma>0$. Kot v prejšnjem primeru:

$$\frac{1}{(n+1)^s}+\ldots+\frac{1}{(n+n)^s}<n\frac{1}{n^s}=\frac{1}{n^\sigma}$$

Torej je

$$\underbrace{\frac{1}{3^s}+\frac{1}{4^s}}_{<\frac{1}{2^\sigma}}+\underbrace{\frac{1}{5^s}+\frac{1}{6^s}+\frac{1}{7^s}+\frac{1}{8^s}}_{<\frac{1}{4^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^2}}+\underbrace{\frac{1}{9^s}+\frac{1}{10^s}+\ldots+\frac{1}{16^s}}_{<\frac{1}{8^\sigma}=\frac{1}{(2^\sigma)^3}}+\ldots$$

Torej je poljubna delna vsota manjša od števila

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^\sigma}+\left(\frac{1}{2^\sigma}\right)^2+\left(\frac{1}{2^\sigma}\right)^3+\ldots+\left(\frac{1}{2^\sigma}\right)^r$$

za nek r, to pa je vedno $\leq$

$$1+\frac{1}{2^s}+\frac{1}{2^\sigma}\frac{1}{1-\frac{1}{2^\sigma}},$$

torej so delne vsote naše vrste navzgor omejene.

$\diamondsuit$

Izrek 75 *Naj bosta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsti z nenegativnimi členi in naj za vsak n velja $a_n \leq b_n$. Če konvergira vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, konvergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, tj., če vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira, divergira tudi $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$.*

Dokaz: Naj bo s_n n-ta delna vsota $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ in t_n n-ta delna vsota $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$. Tedaj iz predpostavke sledi

$$s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n \leq b_1 + b_2 + \ldots + b_n = t_n,$$

za vsak n. Naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergira, tj. naj bo zaporedje delnih vsot $\{t_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno. Tedaj obstaja M, da je $t_n \leq M$ za vsak n. Sledi, da je $s_n \leq t_n \leq M$ za vsak n, kar pomeni, da je tudi zaporedje $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ navzgor omejeno. Torej $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. $\square$

Izrek še vedno velja, če je $a_n \leq b_n$ za vse n od nekega naprej.

Opomba: Če je $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s členi poljubnega znaka in $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ vrsta z nenegativnimi členi, da velja $|a_n| \leq b_n$ za vsak n, tedaj pravimo, da je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ ***majoranta*** za vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Izrek 76 (D'Alembertov-kvocientni kriterij) *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi. Tvorimo zaporedje števil*

$$D_n = \frac{a_{n+1}}{a_n}.$$

Tedaj velja

1. *Če obstaja $q < 1$, da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \leq q$, tedaj $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*

2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $D_n \geq 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Opomba: če slučajno obstaja $\lim_{n\to\infty} D_n = D$, potem velja:

1. Če je $D < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Če je $D > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

3. Če je $D = 1$, o konvergenci v splošnem ne moremo soditi.

Dokaz:

1. Naj bo $D_n \leq q < 1$ $(n \geq n_0)$. Torej sledi $a_{n+1}/a_n \leq q$ $(n \geq n_0)$ oziroma $a_{n+1} \leq qa_n$ $(n \geq n_0)$, zato je za vsak $m \geq 1$

$$
\begin{aligned}
a_{n_0+1} &\leq a_{n_0} q \\
a_{n_0+2} &\leq a_{n_0+1} q \leq a_{n_0} q^2 \\
a_{n_0+3} &\leq a_{n_0+2} q \leq a_{n_0+1} q^2 \leq a_{n_0} q^3 \\
&\dots \\
a_{n_0+m} &\leq a_{n_0} q^m
\end{aligned}
$$

Sledi, da je vrsta $a_{n_0} + a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 \dots$ majoranta za vrsto $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$ Ker je $0 < q < 1$ vrsta $1 + q + q^2 + \dots$ konvergira, zato tudi vrsta $a_{n_0} + a_{n_0} q + a_{n_0} q^2 \dots$ konvergira. Ta vrsta pa je majoranta za $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \dots$, torej po izreku 75 konvergira tudi slednja. Zato tudi vrsta $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ konvergira.

2. Če je $D_n \geq 1$, $n \geq n_0$, je $a_{n+1}/a_n \geq 1$ za $n \geq n_0$, zato $a_{n+1} \geq a_n$ za vsak $n \geq n_0$. Torej je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ naraščajoče zaporedje pozitivnih števil, a_n tako ne konvergira k 0, ko gre n proti ∞, zato vrsta divergira.

$\square$

Zgled: Z uporabo D'Alembertovega kriterija ugotovi, za katere $x > 0$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

konvergentna.

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n\to\infty} D_n \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)x^{n+1}}{nx^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} x \\ &= x \end{aligned}$$

Če je $0 < x < 1$, vrsta torej konvergira. Če je $x > 1$, vrsta divergira. Pri $x = 1$ imamo vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n$, ki divergira. $\diamondsuit$

Izrek 77 (Cauchyjev-korenski kriterij) *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta z nenegativnimi členi. Naj bo*

$$C_n = \sqrt[n]{a_n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tedaj velja:

1. *Če obstaja $q < 1$, da za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \leq q$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*
2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $C_n \geq 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Opomba: če slučajno obstaja $\lim_{n\to\infty} C_n = C$, potem velja:

1. Če je $C < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.
2. Če je $C > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.
3. Če je $C = 1$, o konvergenci ne moremo soditi.

Dokaz:

1. Naj bo $C_n \leq q$ za $n \geq n_0$. Tedaj $\sqrt[n]{a_n} \leq q$ za $n \geq n_0$, tj. $a_n \leq q^n$ za vsak $n \geq n_0$. Torej je vrsta $q^{n_0} + q^{n_0+1} + q^{n_0+2} + \ldots$ majoranta za vrsto $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ Ker je $0 < q < 1$ in prva vrsta ostanek konvergentne geometrijske vrste, prva vrsta konvergira in zato po Izreku

75 tudi $a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots$ konvergira in zato tudi $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ konvergira.

2. Če je $C_n \geq 1$ za $n \geq n_0$, tedaj $\sqrt[n]{a_n} \geq 1$, torej $a_n \geq 1$ za vsak $n \geq n_0$. Zato a_n ne konvergira k 0. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ torej divergira.

□

Zgled: Z uporabo Cauchyjevega kriterija ugotovi, za katere $x > 0$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{n}\right)^n$$

konvergentna. Izračunajmo

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} C_n &= \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\left(\frac{x}{n}\right)^n} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Vrsta torej konvergira za vsak $x > 0$. ◊

Izrek 78 (Raabejev kriterij) *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta s pozitivnimi členi in*

$$R_n = n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right).$$

Tedaj velja:

1. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \geq r > 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.*

2. *Če za vsak n od nekega n_0 naprej velja $R_n \leq 1$, tedaj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.*

Opomba: če slučajno obstaja $\lim_{n\to\infty} R_n = R$, potem velja:

1. Če je $R > 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira.

2. Če je $R < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

3. Če je $R = 1$, o konvergenci ne moremo soditi.

Dokaz: Naredimo primerjavo z vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-s}$.

1. Naj bo $R_n \geq r > 1$ za $n \geq n_0$. Sledi

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1 \geq \frac{r}{n}, \quad n \geq n_0$$

oziroma

$$(*) \quad \frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}, \quad n \geq n_0.$$

Naj bo $1 < s < r$. Ker je

$$\lim_{x \to 0} \frac{(1+x)^s - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{s(x+1)^{s-1}}{1} = s,$$

je

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^s - 1}{\frac{1}{n}} = s < r.$$

Zato za vse n od nekje naprej velja $(1 + 1/n)^s - 1 < r \cdot 1/n$, $n \geq n_0$, tj. $(1 + 1/n)^s < 1 + r/n$, $n \geq n_0$. Zaradi $(*)$ je

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} > \left(1 + \frac{1}{n}\right)^s = \frac{\left(\frac{1}{n}\right)^s}{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}.$$

Torej

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{\left(\frac{1}{n+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n}\right)^s}, \qquad \text{za vsak } \ n \geq n_0.$$

Zmnožimo

$$\frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdots \frac{a_m}{a_{m-1}} < \frac{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \frac{\left(\frac{1}{n_0+2}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0+1}\right)^s} \cdots \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{m-1}\right)^s}$$

in dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}} < \frac{\left(\frac{1}{m}\right)^s}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s}, \quad m \geq n_0$$

oziroma

$$a_m < \frac{a_{n_0}}{\left(\frac{1}{n_0}\right)^s} \left(\frac{1}{m}\right)^s, \quad m \geq n_0.$$

Torej je vrsta iz členov, ki je konvergentna (saj $\sum (1/m)^s$ konvergira, ker je $s > 1$), majoranta za vrsto $a_{n_0} + a_{n_0+1} + \ldots$ Ker majoranta konvergira, naša vrsta konvergira.

2. Naj bo $R_n \leq 1$ za vse $n \geq n_0$. Torej

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) \leq 1, \quad n \geq n_0$$

oziroma

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{a_{n+1}} &\leq 1 + \frac{1}{n}\\ &= \frac{n+1}{n}\\ &= \frac{\frac{1}{n}}{\frac{1}{n+1}}, \quad n \geq n_0.\end{aligned}$$

Enako kot prej dobimo

$$\frac{a_m}{a_{n_0}} \geq \frac{\frac{1}{m}}{\frac{1}{n_0}} \quad \text{oz.} \quad a_m \geq \left(\frac{a_{n_0}}{\frac{1}{n_0}}\right)\frac{1}{m}, \quad m \geq n_0.$$

Vrsta iz členov na desni strani divergira, saj vrsta $\sum 1/n$ divergira. Zato po izreku 75 divergira tudi $\sum a_n$.

□

Zgled: Ugotovi, za katere $x > 0$ je vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+n)}$$

konvergentna.

Uporaba kvocientnega kriterija

$$\begin{aligned}D &= \lim_{n\to\infty} D_n\\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{x+n+1}\\ &= 1\end{aligned}$$

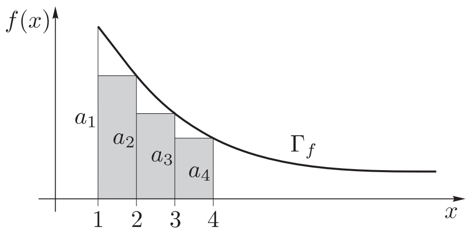
nam pri analizi konvergence ne pomaga. Z uporabo Raabejevega kriterija

$$\begin{aligned}R &= \lim_{n\to\infty} R_n\\ &= \lim_{n\to\infty}\left[n\left(\frac{x+n+1}{n+1} - 1\right)\right]\\ &= \lim_{n\to\infty}\left(\frac{nx}{n+1}\right)\\ &= x\end{aligned}$$

pa dobimo, da je vrsta za $x > 1$ konvergentna, za $x < 1$ pa divergentna. Pri $x = 1$ je vrsta harmonična, torej divergira. $\diamondsuit$

Izrek 79 (Cauchyjev-integralski kriterij) *Naj bo* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *dana vrsta, pri čemer je* $a_n = f(n)$, $n \in \mathbb{N}$, *kjer je* f *pozitivna, zvezna, monotono podajoča funkcija na intervalu* $[1, \infty)$. *Tedaj* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergira natanko takrat, ko obstaja integral*

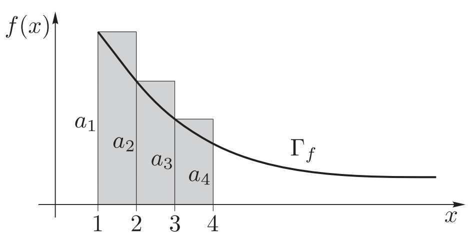
$$\int_1^{\infty} f(x)dx.$$



Slika 6.1: Cauchyjev-integralski kriterij (a)

Dokaz: Samo skica. Naj $\int_1^{\infty} f(x)dx$ konvergira. Delne vsote vrste $a_2 + a_3 + \ldots$ so vsote ploščin pravokotnikov. Ker je zaradi konvergence integrala ploščina p neskončnega lika pod grafom f končna, in vsote ploščin pravokotnikov $\leq p$ sledi, da so delne vsote te vrste $a_2 + a_3 + \ldots$ navzgor omejene s p, vrsta $\sum a_n$ torej konvergira.

Obratno, naj integral $\int_1^{\infty} f(x)dx$ divergira.



Slika 6.2: Cauchyjev-integralski kriterij (b)

Delne vsote vrste $a_1 + a_2 + \ldots$ so vsote ploščin pravokotnikov. Ker je ploščina pod grafom f neskončna sledi, da so delne vsote navzgor neomejene, vrsta torej divergira. $\square$

Zgled: Konvergenco vrste

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log^2 n}$$

bomo preverili z integralskim kriterijem.

$$\begin{aligned}
\int_2^{\infty} \frac{1}{x \log^2 x} &= \lim_{A\to\infty} \int_2^A \frac{dx}{x \log^2 x} \\
&= \lim_{A\to\infty} \left[-\frac{1}{\log x} \right]_2^A \\
&= \lim_{A\to\infty} \left(-\frac{1}{\log A} + \frac{1}{\log 2} \right) \\
&= \frac{1}{\log 2}
\end{aligned}$$

Integral konvergira, torej tudi vrsta konvergira. $\Diamond$

6.3 Vrste s členi poljubnega predznaka, absolutna konvergenca

Definicija 96 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ se imenuje* ***absolutno konvergentna****, če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna.*

Izrek 80 *Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna, je konvergentna.*

Dokaz: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Tedaj obstaja n_0, da za vse $m \geq n_0$ in vse $p \geq 1$ velja:

$$\big| |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_{m+p}| \big| < \varepsilon.$$

Ker je

$$\big| a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+p} \big| \leq |a_m| + |a_{m+1}| + \ldots + |a_{m+p}| < \varepsilon,$$

sledi

$$\big| a_m + a_{m+1} + \ldots + a_{m+p} \big| < \varepsilon.$$

S tem je Cauchyjev pogoj izpolnjen za vrsto $\sum a_n$. Torej ta vrsta konvergira. $\square$

Opomba: Obstajajo vrste, ki so konvergentne, niso pa absolutno konvergentne.

Zgled: ***Alternirajoča (harmonična) vrsta***

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \dots$$

je vrsta, ki ni absolutno konvergentna, je pa konvergentna. (Slednje bomo pokazali pozneje) $\diamondsuit$

Izrek 81 *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ vrsta, v kateri so vsi členi različni od 0. Če je*

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q < 1$$

za vse n od nekega naprej, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergira. Če je

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$$

od nekega n naprej, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergira.

Dokaz: Prvi del dokaza je posledica kvocientnega kriterija za $\sum |a_n|$. Drugi del: če je $|a_{n+1}|/|a_n| \geq 1$ sledi $|a_{n+1}| \geq |a_n|$ od nekega n naprej. Torej a_n ne gre proti 0, zato vrsta divergira. $\square$

6.4 O preureditvi vrste

Naj bo $a_1 + a_2 + \dots$ dana vrsta, $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijekcija. Vrsto $a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \dots$ imenujemo ***preureditev dane vrste***.

Naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergira. Vprašanje je ali je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ konvergentna? Če je, kaj je njena vsota? Je morda enaka vsoti prvotne vrste?

Izrek 82 *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolutno konvergentna. Tedaj je za vsako bijekcijo*

$$\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$$

tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}$ *konvergetna in je*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)}.$$

Dokaz: Naj bo $s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ in $s'_n = a_{\pi(1)} + a_{\pi(2)} + \ldots + a_{\pi(n)}$. Dovolj je, da pokažemo $\lim_{n\to\infty}(s_n - s'_n) = 0$, saj je tedaj $\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} s'_n$, tj. limita n-te delne vsote prvotne vrste je enaka limiti n-te delne vsote preurejene vrste. Naj bo $\varepsilon > 0$. Obstaja n_0, da za $n, m \geq n_0$ velja $\sum_{k=n+1}^{m} |a_k| < \varepsilon$. To sledi iz Cauchyjevega pogoja za $\sum |a_n|$. Od tod v posebnem sledi

$$\begin{aligned} |s_m - s_n| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{m} a_k \right| \\ &\leq \sum_{k=n+1}^{m} |a_k| \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

za vsak $n, m \geq n_0$. Torej $|s_m - s_n| < \varepsilon$ za vsak $n, m \geq n_0$. Naj bo l največje od števil $\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n_0)$. Tedaj je

$$\{\pi^{-1}(1), \ldots, \pi^{-1}(n_0)\} \subset \{1, \ldots, l\}$$

Jasno je $l \geq n_0$. Torej

$$\{1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(l)\}.$$

Če je $n \geq l$, še toliko bolj velja

$$\{1, 2, \ldots, n_0\} \subset \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\}.$$

Če je m največje od števil $\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)$, je

$$\{1, 2, \ldots, n_0\} \overset{(*)}{\subset} \{\pi(1), \pi(2), \ldots, \pi(n)\} \overset{(**)}{\subset} \{1, 2, \ldots, m\}.$$

Tedaj je

$$
\begin{aligned}
|s'_n - s_{n_0}| &= \left| \sum_{i=1}^{n} a_{\pi(i)} - \sum_{i=1}^{n_0} a_i \right| \\
&\overset{(*)}{=} \left| \sum_{\substack{i \le n \\ \pi(i) > n_0}} a_{\pi(i)} \right| \\
&\le \sum_{\substack{i \le n \\ \pi(i) > n_0}} |a_{\pi(i)}| \\
&\overset{(**)}{\le} \sum_{k=n_0+1}^{m} |a_k| \\
&< \varepsilon
\end{aligned}
$$

Sledi: $|s'_n - s_{n_0}| < \varepsilon$, za vsak $n \ge n_0$. Ker je $n \ge n_0$, je $|s_n - s_{n_0}| < \varepsilon$. Torej za $n \ge l$ sledi

$$
\begin{aligned}
|s'_n - s_n| &= |s'_n - s_{n_0} + s_{n_0} - s_n| \\
&\le |s'_n - s_{n_0}| + |s_{n_0} - s_n| \\
&< \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Za vsak $\varepsilon > 0$ torej obstaja l, da je za vse $n \ge l$: $|s'_n - s_n| < 2\varepsilon$. Torej gre $s'_n - s_n$ proti 0, ko gre n proti ∞. □

Definicija 97 *Vrsto $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, ki je konvergentna, pa ni absolutno konvergentna, imenujemo **pogojno konvergentna vrsta**.*

Izrek 83 (Riemann) *Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ pogojno konvergentna vrsta. Za vsako število A obstaja bijekcija $\pi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, da je $\sum_{n=1}^{\infty} a_{\pi(n)} = A$.*

Skica dokaza: Vzemimo npr., da so vsi $a_n \neq 0$. $\sum a_n$ je konvergentna, $\sum |a_n|$ pa ne. Naj bo $\sum p_m$ vsota pozitivnih členov vsote $\sum a_n$, v istem vrstnem redu, $\sum q_m$ pa vsota negativnih členov vsote $\sum a_n$, v istem vrstnem redu. Obe vrsti sta neskončni, sicer bi $\sum a_n$ absolutno konvergirala. Naj bo $A_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. Tedaj je

$$
(*) \quad A_n = P_{k(n)} - Q_{m(n)}.
$$

Pri tem je $P_{k(n)}$ vsota pozitivnih členov med prvimi n členi, $Q_{m(n)}$ pa vsota prvih z -1 pomnoženih negativnih členov med prvimi n členi. Naj bo $A_n^* = \sum_{k=1}^n |a_k|$. Tedaj je

$$(**) \quad A_n^* = P_{k(n)} + Q_{m(n)}.$$

Pokažemo: obe vrsti $\sum p_m$ in $\sum q_m$ divergirata. Če bi namreč ena konvergirala, npr. $\sum p_m$, bi obstajala limita $\lim_{n\to\infty} P_{k(n)}$. Ker $\lim_{n\to\infty} A_n$ obstaja, bi iz $(*)$ sledilo, da tudi $\lim_{n\to\infty} Q_{m(n)}$ obstaja. Torej bi obstajala $\lim_{n\to\infty} A_n^*$, zaradi $(**)$, kar pa ne, ker naša vrsta ne konvergira absolutno.

Sklep: Vrsti $\sum_{n=1}^\infty p_n$ in $\sum_{n=1}^\infty q_n$ divergirata, hkrati pa velja $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$, saj iz konvergence $\sum_{n=1}^\infty a_n$ sledi $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Naj bo A poljubno število. Iz vrste $\sum_{n=1}^\infty p_n$ najprej vzamemo toliko prvih členov, da vsota ravno preseže A. Nato iz vrste $\sum_{n=1}^\infty q_n$ prištejemo prvih toliko členov, da pridemo ravno pod A. Tako nadaljujemo; ker je $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$ in $\lim_{n\to\infty} q_n = 0$ opazimo, da je vsota dobljene vrste ravno A. $\square$

6.5 Alternirajoče vrste

Izrek 84 (Leibnizev kriterij) *Naj bo $\sum_{n=1}^\infty a_n$ alternirajoča vrsta, t.j*

$$\operatorname{sign}(a_{n+1}) = -\operatorname{sign}(a_n) \qquad \text{za vsak } n$$

in naj bo $|a_1|$, $|a_2|$,... padajoče zaporedje z limito 0. Tedaj vrsta $\sum_{n=1}^\infty a_n$ konvergira.

Dokaz: Naj bo $b_n = |a_n|$. Privzamemo, da je $a_1 < 0$. Torej $a_1 = -b_1$. Naša vrsta je tako $-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots$, kjer je $\{b_k\}_{n=1}^\infty$ padajoče zaporedje pozitivnih števil z limito 0. Naj bo s_n n-ta delna vsota vrste $-b_1+b_2-b_3+b_4-\ldots$ Velja

$$s_{2n+1} = s_{2n-1} + \underbrace{b_{2n} - b_{2n+1}}_{\geq 0} \geq s_{2n-1}.$$

Podobno

$$s_{2n+2} = s_{2n} - b_{2n+1} + b_{2n+2} \leq s_{2n}.$$

Sledi $s_1 \leq s_3 \leq s_5 \leq \cdots \leq s_6 \leq s_4 \leq s_2$. Torej je zaporedje $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^\infty$ naraščajoče in navzgor omejeno, zato obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n-1} = s'$ in podobno obstaja $\lim_{n\to\infty} s_{2n} = s''$. Jasno je $s' \le s''$. Ker je

$$\begin{aligned} s' - s'' &= \lim_{n\to\infty} (s_{2n-1} - s_{2n}) \\ &= \lim_{n\to\infty} (-b_{2n}) \\ &= 0, \end{aligned}$$

sledi $s' = s'' = s$, torej $\lim_{n\to\infty} s_n = s$. $\square$

Zgled: Alternirajoča vrsta $\sum(-1)^n/n$ je konvergentna (sledi iz Leibnizevega kriterija), vemo pa, da ni absolutno konvergentna. Torej je pogojno konvergentna. $\lozenge$

6.6 Množenje vrst

Naj bosta dani vrsti (A) in (B) konvergentni.

$$\begin{aligned} (A) &\equiv \sum a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \dots \\ (B) &\equiv \sum b_n = b_1 + b_2 + b_3 + \dots \end{aligned}$$

Oglejmo si vse možne produkte.

$$(C) \equiv \begin{cases} a_1b_1 & a_2b_1 & a_3b_1 & \dots \\ a_1b_2 & a_2b_2 & a_3b_2 & \dots \\ a_1b_3 & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & & \end{cases}$$

Elemente neskončne matrike (C) je mogoče na različne načine razvrstiti v vrsto. Vsaki takšni vrsti pravimo produkt vrste (A) z vrsto (B).

Izrek 85 *Naj bosta (A) in (B) absolutno konvergentni vrsti. Tedaj je njun produkt, torej vrsta sestavljena iz produktov (C) v poljubnem vrstnem redu, konvergentna vrsta in njena vsota je enaka*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} b_n\right),$$

tj. njena vsota je enaka produktu vsot vrst (A) in (B).

Dokaz: Naj bo $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = A^*$ in $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n| = B^*$. Naj bo sedaj

$$\sum_{s=1}^{\infty} a_{i_s} b_{k_s} = a_{i_1} b_{k_1} + a_{i_2} b_{k_2} + \dots$$

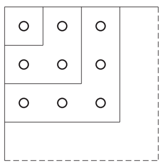
vrsta iz produktov (C) v nekem vrstnem redu. Pokažimo, da je slednja vrsta absolutno konvergentna, tj. $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{k_n}|$ konvergira. Oglejmo si delno vsoto

$$|a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}|.$$

Naj bo ν največji od indeksov $i_1, \dots, i_s, k_1, \dots, k_s$. Tedaj je

$$\begin{aligned} |a_{i_1} b_{k_1}| + |a_{i_2} b_{k_2}| + \dots + |a_{i_s} b_{k_s}| &\leq (|a_1| + \dots + |a_\nu|)(|b_1| + \dots + |b_\nu|) \\ &\leq A^* B^* \end{aligned}$$

Torej so vse delne vsote vrste $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{k_n}|$ z nenegativnimi členi navzgor omejene z $A^* B^*$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} |a_{i_n} b_{k_n}|$ torej konvergira, zato $\sum_{n=1}^{\infty} a_{i_n} b_{k_n}$ absolutno konvergira in je po znanem izreku vsota te vrste neodvisna od vrstnega reda členov.



Slika 6.3: Izbira členov produkta dveh vrst

Vrstni red členov bomo izbrali tako, kot kaže slika 6.3, tj. $a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1 + \dots$ Vemo, da ta vrsta konvergira, zato bo konvergirala tudi vrsta $a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_2 + a_2 b_1) + \dots$, katere delne vsote so ravno:

$$\begin{aligned} &a_1 b_1 \\ &(a_1 + a_2)(b_1 + b_2) \\ &(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) \\ &\vdots \end{aligned}$$

Zaporedje teh delnih vsot konvergira k produktu $(\sum_{n=1}^{\infty} a_n) \cdot (\sum_{n=1}^{\infty} b_n)$. $\square$

6.6.1 Opomba o dvakratnih vrstah

Naj bo A dana neskončna matrika

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & \ddots & \\ \vdots & & & \end{bmatrix}$$

Za vsak i naj bo $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$ formalna vsota elementov i-te vrstice. Formalno vsoto

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

imenujemo dvakratna vrsta. Podobno imenujemo formalno vsoto

$$(**) \qquad \sum_{j=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_{ij}\right)$$

dvakratna vrsta.

Pravimo, da je vrsta $(*)$ konvergentna, če najprej konvergira vsaka $\sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}$, nato pa še vrsta iz vsot $(*)$. Podobno velja za $(**)$. Razvrstimo sedaj elemente matrike A v navadno zaporedje $u_1, u_2, \ldots$ (bijekcija $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$) in tvorimo vsoto

$$(***) \qquad \sum_{i=1}^{\infty} u_i.$$

Velja:

1. če $(***)$ konvergira absolutno in je njena vsota U, tedaj konvergirata $(*)$ in $(**)$ in imata obe vsoto U.

2. če konvergira $(*)$, v kateri vsak člen nadomestimo z njegovo absolutno vrednostjo, tedaj konvergira $(***)$ absolutno (in zato $(***)$ tudi konvergira). Vsote vseh treh vrst so enake.

Dokaz bomo izpustili.

6.7 Funkcijska zaporedja in vrste

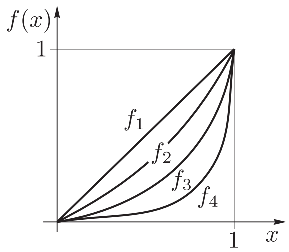
Naj bo $f_1, f_2, \ldots$ zaporedje funkcij, definiranih na množici $\mathcal{D}$.

Definicija 98 *Zaporedje funkcij* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***konvergira*** *na* $\mathcal{D}$*, če za vsak* $x \in \mathcal{D}$ *konvergira zaporedje števil* $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$*. Če za vsak* $x \in \mathcal{D}$ *pišemo*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x),$$

dobimo funkcijo f*, ki jo imenujemo limita zaporedja* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$*.*

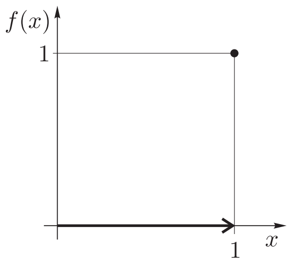
Zgled: Naj bo $\mathcal{D} = [0, 1]$, $f_n(x) = x^n$.



Slika 6.4: Zaporedje funkcij f_n, $f_n(x) = x^n$

Za $0 \le x < 1$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = 0$, za $x = 1$ je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} 1^n = 1$. Zaporedje f_n torej konvergira na $[0, 1]$ k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \le x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$



Slika 6.5: Graf limitne funkcije

$\Diamond$

Definicija 99 *Zaporedje funkcij* $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ***konvergira enakomerno*** *na* $\mathcal{D}$ *(k funkciji* f*), če za vsak* $\varepsilon > 0$ *obstaja* $n_0 \in \mathbb{N}$*, da je* $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ *za vse* $x \in \mathcal{D}$*, čim je* $n \ge n_0$*.*

To je več kot samo konvergenca. Pri konvergenci za vsak $x \in \mathcal{D}$ in vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ čim je $n \geq n_0$; tu je n_0 v splošnem odvisen od x. Pri enakomerni konvergenci pa mora biti mogoče, da ob danem $\varepsilon > 0$ izberemo n_0 neodvisno od x.

Zgled: Zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = x/n$, na $\mathbb{R}$ konvergira k $f(x) \equiv 0$, a ne konvergira enakomerno: če $\varepsilon > 0$ predpišemo, ne moremo najti n_0, da bo $|x/n - 0| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$ veljalo za vse $x \in \mathbb{R}$. $\diamondsuit$

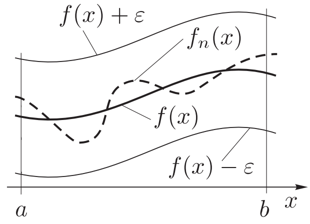
Zgled: Zaporedje funkcij $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $f_n(x) = x^n$, konvergira na $[0, 1]$, ampak ne konvergira enakomerno na $[0, 1]$. Recimo, da konvergira enakomerno k funkciji

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Tedaj za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|x^n - 0| < \varepsilon$, za vse x, $0 \leq x < 1$ in za vse $n \geq n_0$, tj., da je $x < \sqrt[n]{\varepsilon}$ za vse x, $0 \leq x < 1$ in za vse $n \geq n_0$. To pa ni res, saj lahko za x izberemo takšno število, za katero je $\sqrt[n_0]{\varepsilon} < x < 1$. Protislovje pokaže, da konvergenca ni enakomerna. $\diamondsuit$

6.7.1 Geometrijska interpretacija enakomerne konvergence

Naj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f na $[a, b]$ enakomerno.



Slika 6.6: Funkcijsko zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f na $[a, b]$ enakomerno

Enakomerna konvergenca pomeni: za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$ in vsak $x \in [a, b]$ oziroma, če preberemo s slike 6.6:

$$f(x) - \varepsilon < f_n(x) < f(x) + \varepsilon$$

za vsak $n \geq n_0$ in vsak $x \in [a, b]$.

To pomeni, da vsi grafi f_n za $n \geq n_0$ ležijo v pasu okrog grafa f navpične višine 2ε. Torej od nekega n naprej ležijo vsi grafi v tem pasu.

Izrek 86 *Naj zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira enakomerno na $\mathcal{D}$ k funkciji f. Če so vse f_n zvezne v točki $a \in \mathcal{D}$, je tudi f zvezna v a. Torej, če so vse f_n zvezne na $\mathcal{D}$, tj. zvezne v vsaki točki množice $\mathcal{D}$, je tudi f zvezna na $\mathcal{D}$.*

Dokaz: Za vsak n velja

$$|f(x) - f(a)| \leq |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(a)| + |f_n(a) - f(a)|$$

Naj bo $\varepsilon > 0$ poljubno majhen. Zaradi enakomerne konvergence lahko izberemo n tako velik, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/3$ za vsak $x \in \mathcal{D}$. Zaradi zveznosti f_n lahko izberemo $\delta > 0$, da iz $|x - a| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$ sledi $|f_n(x) - f_n(a)| < \varepsilon/3$. Če je torej $|x - a| < \delta$, $x \in \mathcal{D}$, sledi

$$|f(x) - f(a)| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Torej je f res zvezna v točki a. □

Definicija 100 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira na $\mathcal{D}$, če za vsak $x \in \mathcal{D}$ konvergira številska vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$. Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ konvergira enakomerno na $\mathcal{D}$, če zaporedje njenih delnih vsot konvergira enakomerno na $\mathcal{D}$.*

Posledica 33 *Vsota enakomerno konvergentne vrste zveznih funkcij je zvezna funkcija.*

Naslednji izrek navedemo brez dokaza.

Izrek 87 *Zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ funkcij na $\mathcal{D}$ je enakomerno konvergentno natanko tedaj, ko je enakomerno Cauchyjevo, tj., ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ za vsak $x \in \mathcal{D}$ in za vsaka $m, n \geq n_0$.*

Posledica 34 *Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ funkcij na $\mathcal{D}$ enakomerno konvergira natanko tedaj, ko je enakomerno Cauchyjeva, tj. za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $\left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n(x)\right| < \varepsilon$ za vsak $x \in \mathcal{D}$, vsak $m \geq n_0$ in vsak $p \geq 0$.*

Zgled: Dana je vrsta

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n).$$

a) Pokaži, da vrsta konvergira za vsak $x \in [0, 1]$.

Vsi členi v vrsti so nenegativni. Pri $x = 0$ in $x = 1$ je konvergenca očitna. Za splošen x, $0 < x < 1$, bomo konvergenco raziskali z uporabo D'Alembertovega kriterija.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} D_n &= \lim_{n\to\infty} \frac{x^{n+1}(1 - x^{n+1})}{x^n(1 - x^n)} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{x(1 - x^{n+1})}{1 - x^n} \\
&= x
\end{aligned}$$

Za $0 < x < 1$ vrsta konvergira, torej naša vrsta konvergira na $[0, 1]$.

b) Določi $f(x)$ za $x \in [0, 1]$. Vsota je enaka 0 pri $x = 0$ in $x = 1$.

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} x^n(1 - x^n) = \sum_{n=1}^{\infty}(x^n - x^{2n}) \\
= x + x^2 + x^3 + \ldots - x^2 - x^4 - x^6 - \ldots
\end{aligned}$$

Ker pa je $0 < x < 1$, je desna stran enaka

$$\frac{x}{1 - x} - \frac{x^2}{1 - x^2} = \frac{x}{1 - x^2}$$

oziroma

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x = 1, \\ \frac{x}{1-x^2}, & x \in [0, 1). \end{cases}$$

c) Ali vrsta enakomerno konvergira? Ker je

$$\lim_{x\to 1} \frac{x}{1 - x^2} = \infty,$$

konvergenca ne more biti enakomerna. Vse funkcije so zvezne, limitna pa ne.

$\diamondsuit$

Izrek 88 (Primerjalni kriterij, Weierstrassov M-test) *Naj bo $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje funkcij na $\mathcal{D}$ in naj za vsak n obstaja število c_n, da je*

$$(*) \qquad |u_n(x)| \leq c_n \quad \textit{za vsak } x \in \mathcal{D}.$$

Če je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ konvergentna, je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ enakomerno konvergentna na $\mathcal{D}$.

Opomba: Tudi vrsta $|\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)|$ je enakomerno konvergentna na $\mathcal{D}$.

Dokaz: (Skica). Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker c_n konvergira, izpolnjuje Cauchyjev pogoj, torej obstaja n_0, da je $\left|\sum_{n=m}^{m+p} c_n\right| < \varepsilon$ za vsak $m \geq n_0$ in vsak $p \geq 0$, tj. $\sum_{n=m}^{m+p} c_n < \varepsilon$ za vsak $m \geq n_0$ in vsak $p \geq 0$. Torej je zaradi $(*)$ za vse $x \in \mathcal{D}$

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{n=m}^{m+p} u_n(x)\right| &\leq \sum_{n=m}^{m+p} |u_n(x)| \\
&\leq \sum_{n=m}^{m+p} c_n \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

Torej vrsta je enakomerno Cauchyjeva, torej po zgornjem izreku enakomerno konvergentna. $\square$

6.8 Integriranje in odvajanje funkcijskih vrst

Izrek 89 *Naj bodo u_n, $n \in \mathbb{N}$, zvezne funkcije na intervalu $[a, b]$ in naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira enakomerno na $[a, b]$ k funkciji f. (Vemo: vsota f je zvezna funkcija) Tedaj je*

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(x)dx\right] \\
&= \int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots
\end{aligned}$$

Izrek nam pove, da lahko pri teh pogojih zamenjamo $\sum$ in $\int$, saj je

$$\int_a^b \left[\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)dx\right] = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^b u_n(x)dx\right],$$

tj., da lahko vrsto členoma integriramo.

Dokaz: Naj bodo $s_n(x) = \sum_{i=1}^{n} u_i(x)$ delne vsote naše vrste. Po predpostavki s_n enakomerno konvergirajo k f. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $|s_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vsak $n \geq n_0$ in vsak $x \in [a, b]$. Torej je

$$\begin{aligned}
\left| \int_a^b s_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx \right| &= \left| \int_a^b \big(s_n(x) - f(x)\big)dx \right| \\
&\leq \int_a^b |s_n(x) - f(x)|\, dx \\
&\leq \varepsilon \int_a^b 1 \cdot dx \\
&= \varepsilon(b - a),
\end{aligned}$$

za vsak $n \geq n_0$. Iz definicije limite sledi, da je

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b s_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx,$$

tj.

$$\lim_{n\to\infty} \left[\int_a^b u_1(x)dx + \int_a^b u_2(x)dx + \ldots + \int_a^b u_n(x)dx \right] = \int_a^b f(x)dx,$$

kar pa pomeni, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\int_a^b u_n(x)dx\right)$ konvergira in njena vsota je $\int_a^b f(x)dx$.

$\square$

Izrek 90 *Naj bodo funkcije u_n, $n \in \mathbb{N}$, zvezno odvedljive na $[a, b]$. Naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ konvergira na $[a, b]$ k $f(x)$ in naj vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ enakomerno konvergira na $[a, b]$. Tedaj je f odvedljiva na $[a, b]$ in velja*

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x) \\
&= u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots \quad \textit{za vsak } x \in [a, b].
\end{aligned}$$

To pomeni, da je $\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$, za vsak $x \in [a, b]$, tj., da vsoto lahko členoma odvajamo.

Opomba: Izrek 89 je zagotovil, da je $\int \sum = \sum \int$, izrek 90 pa, da je $\frac{d}{dx} \sum = \sum \frac{d}{dx}$.

Dokaz: Naj bo $f^*(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. Ker so u_n' zvezne in ker vrsta enakomerno konvergira, je tudi f^* zvezna na $[a, b]$. Po prejšnjem izreku smemo členoma integrirati na vsakem intervalu $[a, x]$:

$$\begin{aligned}\int_a^x f^*(t)dt &= \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_a^x u_n'(t)dt\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [u_n(x) - u_n(a)] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) - \sum_{n=1}^{\infty} u_n(a) \\ &= f(x) - f(a).\end{aligned}$$

Torej za vsak $x \in [a, b]$ velja $\int_a^x f^*(t)dt = f(x) - f(a)$. Ker je f^* zvezna funkcija na $[a, b]$, je leva stran odvedljiva na $[a, b]$ in njen odvod je enak $f^*(x)$. Torej je tudi desna stran odvedljiva in odvoda sta enaka, tj. $f'(x) = f^*(x)$ za vsak $x \in [a, b]$. $\square$

Izrek 91 *Naj bodo f_n, $n \in \mathbb{N}$, zvezne funkcije na $[a, b]$ in naj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira enakomerno na $[a, b]$ k funkciji f. Tedaj je*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f_n(x)dx.$$

Izrek 92 *Naj bodo f_n, $n \in \mathbb{N}$, zvezno odvedljive funkcije na $[a, b]$ in naj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f na $[a, b]$. Naj zaporedje f_n' konvergira enakomerno na $[a, b]$. Tedaj je f odvedljiva na $[a, b]$ in velja*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f_n'(x) \quad \textit{za vsak } x \in [a, b].$$

Opomba: V bistvu sta zadnja dva izreka preformulirana prejšnja izreka za zaporedja (delne vsote vrst).

6.9 Potenčne vrste

Potenčna vrsta je vrsta oblike

$$(*) \qquad a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + a_3(x - x_0)^3 + \ldots$$

Poseben primer potenčne vrste je

$$(**) \qquad a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + \dots$$

Za analizo konvergence vrste $(*)$ je dovolj raziskati konvergenco vrste $(**)$, do katere pridemo, ko $x - x_0$ nadomestimo z x. Zato podrobneje obravnavamo le vrste oblike $(**)$. Vsaka takšna potenčna vrsta konvergira pri $x = 0$. Lahko se zgodi, da potenčna vrsta $(**)$ konvergira samo pri $x = 0$.

Zgled: Oglejmo si vrsto

$$\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n.$$

Recimo, da vrsta konvergira pri $x \neq 0$.

$$\frac{|(n+1)!x^{n+1}|}{|n!x^n|} = (n+1)|x|$$

Desna stran je za vse dovolj velike n navzdol omejena z 1. Torej $|(n+1)!x^{n+1}| \geq |n!x^n|$ za vse dovolj velike x. Torej gotovo ni res, da je $\lim_{n\to\infty} n!x^n = 0$. Vrsta torej divergira. Sledi, da vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n!x^n$ konvergira samo pri $x = 0$. $\diamondsuit$

Izrek 93 *Naj bo $\sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ potenčna vrsta. Obstaja takšen $R \in [0, \infty]$, da je vrsta $(**)$ absolutno konvergentna za vsak $|x| < R$ in divergentna za $|x| > R$. Če je $0 < r < R$, tedaj vrsta enakomerno konvergira na $[-r, r]$. Število R imenujemo **konvergenčni polmer (radij)** vrste $(**)$.*

Torej je konvergenčno območje potenčne vrste nek interval. Na vsakem zaprtem strogo manjšem intervalu pa vrsta konvergira enakomerno.

Dokaz: Naj vrsta $(**)$ konvergira pri $x = x_0 \neq 0$. Naj bo $0 < r < |x_0|$. Pokažemo, da vrsta $(**)$ konvergira absolutno in enakomerno na $[-r, r]$. Ker vrsta $(**)$ konvergira pri x_0, je $\lim_{n\to\infty} |a_nx_0^n| = 0$. Torej obstaja $M < \infty$, da je $|a_n|\ |x_0^n| < M$, za vsak n. Če je $x \in [-r, r]$, je:

$$\begin{aligned} |a_nx^n| &\leq |a_n|r^n \\ &= |a_n| \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n |x_0^n| \\ &\leq M \left(\frac{r}{|x_0|}\right)^n. \end{aligned}$$

Torej $|a_n x^n| \leq M\,(r/|x_0|)^n$ za vsak $x \in [-r, r]$ in vsak $n \in \mathbb{N}$. Ker je $r/|x_0| < 1$, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty}(r/|x_0|)^n$ konvergira, torej je $\sum_{n=1}^{\infty} M(r/|x_0|)^n$ konvergentna številska vrsta. Ker je $|a_n x^n| \leq M\,(r/|x_0|)^n$ za vsak $x \in [-r, r]$ in vsak $n \in \mathbb{N}$, po Weierstrassovem M-testu sledi, da je $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ enakomerno konvergentna na $[-r, r]$. (Seveda je za vsak $x \in [-r, r]$ tudi absolutno konvergentna, saj njena majoranta $\sum M\,(r/|x_0|)^n$ konvergira.) Ker je bil $r < |x_0|$ poljuben, sledi, da vrsta $(**)$ konvergira za vsak x, $-|x_0| < x < |x_0|$. Naj bo

$$R = \sup\{|x_0| : \text{ vrsta } (**) \text{ konvergira pri } x = x_0\}.$$

Ta R ima vse zahtevane lastnosti. □

Posledica 35 *Vsota potenčne vrste s konvergenčnim polmerom $R > 0$ je zvezna funkcija na $(-R, R)$.*

Izrek 94 *Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ velja:*

i) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$, *če limita obstaja.*

ii) $\dfrac{1}{R} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$, *če limita obstaja.*

Dokaz: *i)* Naj bo $1/\rho = \lim_{n\to\infty} |a_{n+1}/a_n|$.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}x^{n+1}}{a_n x^n}\right| &= \lim_{n\to\infty} \left(\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \; |x|\right) \\ &= \frac{|x|}{\rho}. \end{aligned}$$

Kvocientni kriterij pravi, da za $|x|/\rho < 1$ vrsta (absolutno) konvergira, za $|x|/\rho > 1$ vrsta divergira oz. za $|x| < \rho$ vrsta konvergira, za $|x| > \rho$ vrsta divergira. Torej je $\rho = R$.

Podobno pokažemo za *i)* z uporabo korenskega kriterija. □

Izrek 95 (Cauchy-Hadamard) *Za konvergenčni polmer R potenčne vrste $\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ velja:*

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Dokaz: Naj bo $L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}$. Denimo, da je $0 < L < \infty$. Naj bo $|x| < 1/L$. Ker je $1/|x| > L$, je $1/|x| > L + \varepsilon$ za nek $\varepsilon > 0$. Ker je L največje stekališče, le končno mnogo števil preseže $L + \varepsilon$, torej za n od nekje naprej velja $\sqrt[n]{|a_n|} \le L + \varepsilon$. Za vse n od nekje naprej je tako

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \sqrt[n]{|a_n|}|x|\\ &\le (L+\varepsilon)|x|\\ &< 1.\end{aligned}$$

Zato po korenskem kriteriju vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergira.

Naj bo $|x| > 1/L$. Ker je $1/|x| < L$, je $1/|x| < L - \varepsilon$ za nek $\varepsilon > 0$. Ker je L stekališče, velja $\sqrt[n]{|a_n|} > L - \varepsilon$ za neskončno mnogo n-jev, torej

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{|a_n x^n|} &= \sqrt[n]{|a_n|}\ |x|\\ &> (L-\varepsilon)|x|\\ &> 1.\end{aligned}$$

To pa pomeni, da $|a_n x^n|$ ne more konvergirati k 0 pri $n \to \infty$, vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ torej divergira. Torej je R res konvergenčni polmer. Nič težji ni premislek, če je $L = 0$ ali $L = \infty$. □

Izrek 96 *Naj bo $R > 0$ konvergenčni polmer potenčne vrste. Tedaj lahko na $(-R, R)$ vrsto členoma integriramo, tj.*

$$\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}, \qquad (-R < x < R)$$

in členoma odvajamo, tj.

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \qquad (-R < x < R)\,.$$

Dokaz: Členska integracija sledi iz dejstva, da je vrsta enakomerno konvergentna na vsakem zaprtem podintervalu $(-R, R)$. Za takšne pa velja izrek o členski integraciji.

$$
\begin{aligned}
\int_0^x \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right] dt &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n dt \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left[\frac{a_n t^{n+1}}{n+1}\right]_0^x \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1}
\end{aligned}
$$

Za dokaz drugega dela si poglejmo vrsto iz odvodov $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$. Naj bo $|x| < R$. Izberimo si r, $|x| < r < R$. Ker vrsta $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ konvergira pri $t = r$, sledi $|a_n| r^n \to 0$, torej gotovo $|a_n| r^n < M$, za nek $M < \infty$ in vsak n. Zato

$$
\begin{aligned}
n|a_n||x|^{n-1} &= n|a_n|r^n \left(\frac{|x|}{r}\right)^{n-1} \frac{1}{r} \\
&\le \frac{M}{r} n \left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}.
\end{aligned}
$$

Vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n|x/r|^{n-1}$ konvergira, saj po kvocientnem kriteriju

$$
\frac{(n+1)\left|\frac{x}{r}\right|^n}{n\left|\frac{x}{r}\right|^{n-1}} \to \left|\frac{x}{r}\right| < 1, \quad \text{ko gre } n \to \infty.
$$

Zato konvergira tudi vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n|a_n||x|^{n-1}$. Torej vsaka $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ konvergira. Torej konvergenčni polmer vrste iz odvodov ni manjši od konvergenčnega polmera prvotne vrste. Če bi bil večji, potem bi s člensko integracijo vrste iz odvodov prišli v protislovje, saj bi tudi prvotna vrsta morala konvergirati na večjem intervalu, kot je $(-R, R)$. Torej sta konvergenčna polmera obeh vrst enaka. Ker na vsakem podintervalu $[-r, r] \subset (-R, R)$ vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ konvergira, vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ pa (kot potenčna vrsta) enakomerno konvergira na $[-r, r]$, lahko po znanem izreku členoma odvajamo. Ker lahko $r < R$ izberemo poljubno blizu R, torej lahko členoma odvajamo na $(-R, R)$. $\square$

Posledica 36 *Naj $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ konvergira na $(-R, R)$. Tedaj je njena vsota na $(-R, R)$ neskončno mnogokrat odvedljiva funkcija, tj. funkcija razreda $\mathcal{C}^{\infty}$.*

Zgled: Izračunajmo vsoto vrste

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n.
$$

Po kvocientnem kriteriju

$$\begin{aligned} D &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{n+1}(n+1)^{-1}}{x^n n^{-1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{n|x|}{n+1} \\ &= |x| \end{aligned}$$

vrsta konvergira, ko je $D < 1$, tj., ko je $|x| < 1$. Za $|x| > 1$ pa vrsta divergira.

Zapišimo vrsto v razgrnjeni obliki:

$$f(x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \ldots,$$

odvajajmo

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \\ &= \frac{1}{1-x} \end{aligned}$$

in integrirajmo

$$\begin{aligned} f(x) &= \int \frac{1}{1-x} dx \\ &= -\log|1-x| + C. \end{aligned}$$

Začetni pogoj je $f(0) = 0$ zato sledi $C = 0$ oz.

$$f(x) = -\log(1-x).$$

$\diamondsuit$

Zgled: Dana je potenčna vrsta

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(x-1)^n}{n}.$$

$a)$ Določi konvergenčno območje vrste.

Vrsta zagotovo konvergira v $x = 1$. Splošni člen je tako $a_n = 3^{n-1} n^{-1}$.

Izračunajmo konvergenčni polmer.

$$\begin{aligned} \frac{1}{R} &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3^n(n+1)^{-1}}{3^{n-1}n^{-1}} \right| \\ &= \lim_{n\to\infty} \left| \frac{3n}{n+1} \right| \\ &= 3 \end{aligned}$$

Konvergenčni polmer je $R = 1/3$. Dana potenčna vrsta konvergira na $(1-1/3, 1+1/3)$, tj. na $(2/3, 4/3)$. Preverimo konvergenco za $x = 2/3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(2/3-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(-1/3)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{3n}\end{aligned}$$

Po Leibnizevem kriteriju ($|a_n| > |a_{n+1}|$, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$) ta vrsta konvergira. Preverimo še za $x = 4/3$:

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(4/3-1)^n}{n} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^{n-1}(1/3)^n}{n} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3n}\end{aligned}$$

Dobljena vrsta je harmonična in ni konvergentna. Konvergenčno območje dane vrste je torej $[2/3, 4/3)$.

b) Kje je vsota zvezna?

Po posledici 35 je vsota zagotovo zvezna na $(2/3, 4/3)$.

c) Izračunaj vsoto pri $x = 2/3$.

Vrsto odvajamo in seštejemo

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (3x-3)^{n-1} = \frac{1}{4-3x}$$

in nato integriramo

$$\begin{aligned}f(x) &= \int \frac{1}{4-3x} dx \\ &= -\frac{1}{3} \log|4-3x| + C.\end{aligned}$$

Iz začetnega pogoja $f(1) = 0$, zato sledi $C = 0$. Torej

$$f(x) = -\frac{1}{3} \log|4-3x|.$$

Vrednost $f(x)$ v $x = 2/3$ je tako $f(2/3) = -1/3 \log 2$. Dana vsota je zvezna tudi v $x = 2/3$. Torej je vsota potenčne vrste zvezna povsod na konvergenčnem območju (intervalu), tj. na $[2/3, 4/3)$.

$\Diamond$

Poglavje 7

Taylorjeva formula in Taylorjeva vrsta

7.1 Taylorjeva formula

Naj bo $P(x)$ polinom.

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

Zanima nas, kako bi $P(a+h)$ izrazili s potencami h. Jasno je, da je $P(a+h)$ polinom v h.

$$P(a+h) = A_0 + A_1 h + \ldots + A_n h^n$$

V $h = 0$ je vrednost $P(a) = A_0$. Polinom $P(a+h)$ odvajajmo po h.

$$P'(a+h) = A_1 + 2A_2 h + \ldots + nA_n h^{n-1}$$

V $h = 0$ je vrednost $P'(a) = A_1$. Še enkrat odvajajmo po h.

$$P''(a+h) = 2A_2 + 6A_3 h + \ldots + n(n-1)A_n h^{n-2}$$

V $h = 0$ je vrednost $P''(a) = 2A_2$. Še odvajamo po h... Ta postopek ponavljamo in dobimo

$$P(a+h) = P(a) + \frac{P'(a)}{1!}h + \frac{P''(a)}{2!}h^2 + \ldots + \frac{P^{(n)}(a)}{n!}h^n,$$

kar je polinom stopnje n.

Definicija 101 *Naj bo f n-krat odvedljiva v okolici točke a. Polinom*

$$T_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

imenujemo (n-ti) ***Taylorjev polinom*** *(n-krat odvedljive) funkcije f v okolici točke a.*

Želeli bi uporabiti Taylorjeve polinome za aproksimacijo funkcij. Recimo, da je v okolici točke a funkcija f enaka vsoti konvergentne potenčne vrste.

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n (x-a)^n \\ &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots, \qquad (a-r < x < a+r) \end{aligned}$$

Takšno vrsto lahko členoma odvajamo (to vemo že od prej)

$$f'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots, \qquad (a-r < x < a+r).$$

V $x = a$, je $f'(a) = c_1$. $f'(x)$ odvajamo po x.

$$f''(x) = 2c_2 + 6c_3(x-a) + 12c_4(x-a)^2 + \ldots, \qquad (a-r < x < a+r)$$

V $x = a$, je $f''(a) = 2c_2$. Še odvajamo po x... Po n-kratnem odvajanju dobimo

$$f^{(n)}(a) = n! c_n.$$

Koeficienti naše vrste so torej z vsoto f enolično določeni.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

to pomeni

$$\begin{aligned} f(x) &= \lim_{n\to\infty} \sum\nolimits_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k \\ &= \lim_{n\to\infty} T_n(x), \end{aligned}$$

za vsak $x \in (a-r, a+r)$. Za praktično uporabo pa bi radi $f(x)$ aproksimirali s $T_n(x)$, zato je pomembno oceniti ostanek

$$R_n = f(x) - T_n(x).$$

Izrek 97 (Taylor) *Naj bo funkcija f $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu $\mathcal{I}$, ki vsebuje točko a. Tedaj za vsak $n \in \{0, 1, \ldots, n\}$, za vsak $x \in \mathcal{I}$ in za vsak $p \in \mathbb{N}$ obstaja ξ med a in x, da je*

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{pn!}(x-a)^p(x-\xi)^{n-p+1}$$

oziroma, če je $h = x - a$ in $0 < \vartheta < 1$ in

$$\vartheta := \frac{\xi - a}{h},$$

dobimo

$$R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{pn!}h^{n+1}(1-\vartheta)^{n-p+1};$$

posebej, pri $p = 1$

$$R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{n!}h^{n+1}(1-\vartheta)^n,$$

pri $p = n+1$ pa sledi

$$R_n(a+h) = \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1}.$$

Dokaz: Namesto x pišimo b, $b \in \mathcal{I}$. Fiksirajmo n, p, b. Naj bo

$$F(x) = f(x) + \frac{b-x}{1!}f'(x) + \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) + \left(\frac{b-x}{b-a}\right)^p R_n(b)$$

$F(a) = T_n(b) + R_n(b) = f(b)$, $F(b) = f(b)$. Ker je f $(n+1)$-krat odvedljiva, je F odvedljiva funkcija na $\mathcal{I}$. Ker je $F(a) = F(b)$, po Rolleovem izreku obstaja ξ, $a < \xi < b$, da je $F'(\xi) = 0$. Izračunajmo

$$F'(x) = f'(x) - f'(x) + \frac{b-x}{1!}f''(x) - \frac{b-x}{1!}f''(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) - p(b-x)^{p-1}\frac{R_n(b)}{(b-a)^p}$$

$F'(\xi) = 0$ pomeni, da je

$$\frac{R_n(b)}{(b-a)^p}p(b-\xi)^{p-1} = \frac{(b-\xi)^n}{n!}f^{(n+1)}(\xi).$$

Izrazimo $R_n(b)$ in dobimo želeno formulo. $\square$

Iz Taylorjeve formule sledi naslednja posledica.

Posledica 37 *Če je f funkcija, ki je $(n+1)$-krat odvedljiva na odprtem intervalu $\mathcal{I}$, ki vsebuje točko a, za vsak $x \in \mathcal{I}$ obstaja ξ med a in x, da je*

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}.$$

V malenkost drugačni obliki zapišemo:

$$f(a+h) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}h + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + \frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}h^{n+1},$$

pri čemer je $0 < \vartheta < 1$.

Opomba: Poseben primer Taylorjeve formule dobimo pri $n = 0$:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(\xi)}{1!}(x-a)$$

oziroma

$$\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(\xi),$$

kjer je $a < \xi < x$, kar je natanko Lagrangeev izrek. Torej je Taylorjev izrek za $n = 0$ znani Lagrangeev izrek.

Opomba: Taylorjeva formula je uporabna za računanje vrednosti funkcije v bližnji točki.

$$f(x) \approx f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^n(a)}{n!}(x-a)^n$$

Pri tem je napaka, ki jo naredimo

$$\frac{f^{(n+1)}(a+\vartheta h)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Zgled: Izračunaj število e z napako manjšo od 10^{-5}.

Naj bo $f(x) = e^x$, $f'(x) = e^x$, $f''(x) = e^x$,... V Taylorjevo formulo vstavimo $x = 1$, $a = 0$. Dobimo:

$$\begin{aligned} f(1) &= f(0) + \frac{f'(0)}{1!}(1-0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}(1-0)^n + \frac{f^{(n+1)}(0+\vartheta 1)}{(n+1)!}(1-0)^{n+1} \\ &= 1 + \frac{1}{1!}\cdot 1 + \ldots + \frac{1}{n!}\cdot 1 + \frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!}\cdot 1, \qquad 0 < \vartheta < 1. \end{aligned}$$

Ker je $e^{\vartheta} < e^1 < 3$, zato ostanek (napako) ocenimo takole:

$$\left|\frac{e^{\vartheta}}{(n+1)!}\right| < \frac{3}{(n+1)!}, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

Če izberemo n tako velik, da bo

$$\frac{3}{(n+1)!} < 10^{-5},$$

bo $1 + 1 + 1/2! + \ldots + 1/n!$ enako vsaj na tri decimalke natančno. Izberimo, npr. $n = 8$. Tedaj je $e = 1 + 1 + 1/2! + \ldots + 1/8! \approx 2.71828$ izračunano na 5 decimalnih mest natančno. ♢

V obravnavanem primeru smo upoštevali $f(x) = T_n(x) + R_n(x)$, kjer $R_n(x) \to 0$, ko $n \to \infty$. To pa pomeni, da vrsta

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots$$

konvergira, in sicer k $f(x)$, saj je njena n-ta delna vsota enaka

$$f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = T_n(x).$$

Če je

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0,$$

to pomeni, da je

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} T_n(x) &= \lim_{n\to\infty} \big(f(x) - R_n(x)\big) \\
&= f(x) - \lim_{n\to\infty} R_n(x) \\
&= f(x) - 0 \\
&= f(x).
\end{aligned}$$

7.2 Taylorjeva vrsta

Definicija 102 *Naj bo f neskončno mnogokrat odvedljiva v okolici točke a. Vrsto*

$$\begin{aligned}
T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\
&= f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots
\end{aligned}$$

imenujemo ***Taylorjeva vrsta*** *funkcije f pri točki a.*

Vprašanje je ali ta vrsta sploh konvegira. Če konvergira, ali je njena vsota morda enaka $f(x)$? Vemo že, da če je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$ to pomeni, da vrsta konvergira k $f(x)$. (To je bilo res v predhodnih primerih.)

Zgled: Zapišimo Taylorjevo vrsto za

$$f(x) = \frac{x+1}{(1-x)^3}$$

okrog točke $a = 0$, nato pa s pomočjo dobljenega rezultata izračunajmo $\sum_{n=1}^{\infty} n^2/2^{n-1}$. *Namig: razdeli na parcialne ulomke.*

$$\frac{x+1}{(1-x)^3} = \frac{A}{(1-x)^2} + \frac{B}{(1-x)^3}$$

Sledi: $A(1-x) + B = x + 1$ oz. $A = -1$ in $B = 2$. Torej

$$\begin{aligned} f(x) &= -\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{2}{(1-x)^3} \\ &= -(1-x)^{-2} + 2(1-x)^{-3}. \end{aligned}$$

Izračunajmo nekaj odvodov.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -2(1-x)^{-3} - 2(-3)(1-x)^{-4} \\ f''(x) &= -(-2)(-3)(1-x)^{-4} + 2(-3)(-4)(1-x)^{-5} \\ &\vdots \\ f^{(n)}(x) &= -(n+1)!(1-x)^{-(n+2)} + (n+2)!(1-x)^{-(n+3)} \end{aligned}$$

n-ti odvod v točki $a = 0$ je tako $f^{(n)}(0) = -(n+1)! + (n+2)!$. Taylorjevo vrsto za f v okolici točke $a = 0$ zapišemo:

$$\begin{aligned} T(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{-(n+1)! + (n+2)!}{n!} x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)^2 x^n. \end{aligned}$$

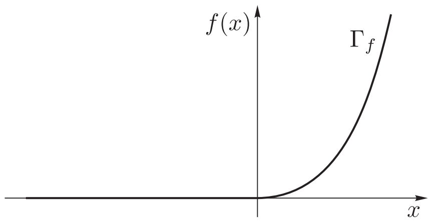
Vsota zgornje vrste

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^{n-1}} &= T(\tfrac{1}{2}) \\
&= f(\tfrac{1}{2}) \\
&= \frac{\frac{1}{2}+1}{(1-\frac{1}{2})^3} \\
&= 12.
\end{aligned}
$$

$\Diamond$

Zgled: Pogledali si bomo primer vrste, ki konvergira, njena vsota pa ni enaka $f(x)$.

$$
f(x) = \begin{cases} e^{-1/x}, & x > 0 \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}
$$



Slika 7.1: Taylorjeva vrsta funkcije f

Ta funkcija je ∞-krat odvedljiva in velja

$$
f(0) = f'(0) = f''(0) = \ldots = 0
$$

Torej je njena Taylorjeva vrsta enaka 0 pri 0. Potem bi morala biti njena vsota povsod enaka 0. Vendar pa $f(x) \neq 0$ pri $x > 0$. Torej $T(x) \neq f(x)$ za vse x blizu 0.

7.3 Taylorjeve vrste elementarnih funkcij

V fiziki in tehniki nas pogosto zanima, koliko členov v Taylorjevi *formuli* moramo vzeti, da lahko za praktično rabo zanemarimo ostanek. Taylorjeva vrsta pa je bolj teoretične narave.

7.3.1 Eksponentna funkcija

Za $f(x) = e^x$ v $a = 0$ zapišimo Taylorjevo formulo:

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{f^n(0)}{n!}x^n + \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1},$$

pri tem je $0 < \vartheta < 1$. Ocenimo ostanek:

$$R_n(x) = \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1}, \qquad 0 < \vartheta < 1.$$

- Če je $x < 0$, potem je

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &\leq \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} \cdot 1, \quad (\text{ker je } e^{\vartheta x} < 1) \\ &= \frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{n+1} \end{aligned}$$

  Izberimo $n + 1$ tako velik, da je

$$\frac{|x|}{n+1} < \frac{1}{2}, \qquad (x \text{ je fiksen}).$$

  Če je $m > n + 1$, je

$$|R_n(x)| < \left(\frac{|x|}{1}\frac{|x|}{2}\cdots\frac{|x|}{n+1}\right)\frac{|x|}{n+2}\frac{|x|}{n+3}\cdots\frac{|x|}{m}.$$

  Torej za dovolj velike m velja, da je

$$|R_n(x)| \leq C\left(\frac{1}{2}\right)^{m-(n+1)}.$$

  Torej pri $m \to \infty$ gre desna stran $\to 0$, zato tudi leva stran $\to 0$. Torej za $x < 0$ je

$$\lim_{m\to\infty} R_m(x) = 0.$$

- Če pa je $x > 0$, pa je

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{e^{\vartheta x}}{(n+1)!}x^{n+1} \\ &\leq \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}e^x \end{aligned}$$

  Torej tudi pri $x > 0$ gre $R_n(x) \to 0$ pri $n \to \infty$.

Torej za vse x velja

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$$

in zato

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \ldots + \frac{1}{n!}x^n + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.3.2 Trigonometrične funkcije

Sinus

Za $f(x) = \sin x$ v $a = 0$ zapišimo Taylorjevo formulo. Najprej zapišimo nekaj odvodov.

$$\begin{array}{cccc} f'(x) = \cos x, & f''(x) = -\sin x, & f'''(x) = -\cos x, & f^{iv}(x) = \sin x \\ f'(0) = 1, & f''(0) = 0, & f'''(0) = -1, & f^{iv}(x) = 0 \end{array}$$

Taylorjeva formula za $f(x) = \sin x$ pri $a = 0$:

$$\sin x = 0 + \frac{1}{1!}x + 0 \cdot x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + 0 \cdot x^4 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ocenimo ostanek

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\vartheta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \\ &\leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

ki gre $\to 0$ pri $n \to \infty$ (vemo od prej). Torej je za vsak x je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Tako dobimo:

$$\sin x = \frac{1}{1!}x - \frac{1}{3!}x^3 + \frac{1}{5!}x^5 - \frac{1}{7!}x^7 + \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Kosinus

Za $f(x) = \cos x$ v $a = 0$ zapišimo Taylorjevo formulo. Najprej zapišimo nekaj odvodov.

$$\begin{array}{cccc} f'(x) = -\sin x, & f''(x) = -\cos x, & f'''(x) = \sin x, & f^{iv}(x) = \cos x \\ f'(0) = 0, & f''(0) = -1, & f'''(0) = 0, & f^{iv}(x) = 1 \end{array}$$

Taylorjeva formula za $f(x) = \cos x$ pri $a = 0$:

$$\cos x = 1 + 0 \cdot x - \frac{1}{2!}x^2 - 0 \cdot x^3 + \frac{1}{4!}x^4 + 0 \cdot x^5 + \ldots + \frac{f^{(n+1)}(\vartheta x)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Ocenimo ostanek

$$\begin{aligned} |R_n(x)| &= \frac{|f^{(n+1)}(\vartheta x)|}{(n+1)!}|x|^{n+1} \\ &\leq 1 \cdot \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

ki gre $\to 0$ pri $n \to \infty$ (vemo od prej). Torej je za vsak x je $\lim_{n\to\infty} R_n(x) = 0$. Tako dobimo:

$$\cos x = 1 - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{4!}x^4 - \frac{1}{6!}x^6 \ldots, \quad x \in \mathbb{R}.$$

7.3.3 Logaritemska funkcija

Za $f(x) = \log(1+x)$, $(-1 < x < 1)$ v $a = 0$ zapišimo Taylorjevo formulo. To lahko storimo enako, kot v prejšnjih dveh primerih. V tem primeru pa bomo poskusili na nekoliko drugačen način. Izračunamo prvi odvod

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{1+x} \\ &= \frac{1}{1-(-x)} \\ &= 1 + (-x) + (-x)^2 + (-x)^3 \ldots \\ &= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \ldots \end{aligned}$$

Ta vrsta konvergira na $(-1 < x < 1)$. Členoma jo integriramo

$$\begin{aligned} f(x) - f(0) &= \int_0^x f'(t)dt \\ &= \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \ldots)dt \\ &= \int_0^x 1dt - \int_0^x tdt + \int_0^x t^2dt - \int_0^x t^3dt + \ldots \\ &= x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \end{aligned}$$

Pri tem smo upoštevali $f(0) = \log(1+0) = 0$, zato je

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots, \quad -1 < x < 1.$$

Opomba: Funkcije, ki so (lokalno) enake vsoti konvergentnih potenčnih vrst, imenujemo ***analitične funkcije***. Torej vsaka funkcija, ki jo lahko razvijemo v Taylorjevo vrsto, je analitična funkcija.

7.3.4 Binomska vrsta

Naj bo $\alpha \in \mathbb{N}$, $-1 < x < 1$. Tedaj velja

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \binom{\alpha}{2}x^2 + \binom{\alpha}{3}x^3 + \ldots + \binom{\alpha}{\alpha}x^\alpha$$

pri čemer so $\binom{\alpha}{k}$ binomski koeficienti, torej

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Naj bo $\alpha \in \mathbb{R}$ in $-1 < x < 1$.

$$\begin{aligned}
f(x) &= (1+x)^{\alpha},\\
f'(x) &= \alpha(1+x)^{\alpha-1},\\
f''(x) &= \alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2},\\
&\vdots\\
f^{(k)}(x) &= \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k},\ldots
\end{aligned}$$

$$f(0)=1, \quad f'(0)=\alpha,\ldots,f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1),\ldots$$

Zapišimo Taylorjevo vrsto za $f(x)$ pri $a=0$.

$$\begin{aligned}
&f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\frac{f'''(0)}{3!}x^3+\ldots\\
&= 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+\ldots\\
&= 1+\alpha x+\tbinom{\alpha}{2}x^2+\tbinom{\alpha}{3}x^3+\ldots
\end{aligned}$$

Ocene ostanka pokažejo, da je $R_n(x) \to 0$, ko gre $n \to \infty$ za $-1 < x < 1$, torej je

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\alpha x+\tbinom{\alpha}{2}x^2+\tbinom{\alpha}{3}x^3+\ldots, \qquad (-1<x<1),$$

kjer je $\binom{\alpha}{k}$ binomski koeficient, torej

$$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{1\cdot 2\cdots k}.$$

Poglavje 8

Metrični prostori

8.1 Definicija in osnovne lastnosti

Metričen prostor je neprazna množica $\mathcal{M}$ (elemente po navadi imenujemo točke), kjer je za vsak par x, y iz $\mathcal{M}$ definirana ***razdalja*** $d(x, y)$, ki je nenegativno število, z običajnimi lastnostmi.

Definicija 103 *Metričen prostor je neprazna množica $\mathcal{M}$ skupaj s preslikavo $d : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, z naslednjimi lastnostmi:*

(i) $d(x, y) \geq 0$ *za vsaka* $x, y \in \mathcal{M}$ *in* $d(x, y) = 0$ *natanko tedaj, ko je* $x = y$.

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$ *za vsaka* $x, y \in \mathcal{M}$.

(iii) za poljubne točke $x, y, z \in \mathcal{M}$ *velja* ***trikotniška neenakost****.*

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$$

Če ima d te lastnosti, imenujemo $d(x, y)$ razdalja med točkama x in y.

Opomba: Iz (iii) sledi $d(x, y) \geq d(x, z) - d(z, y)$ za poljubne $x, y, z \in \mathcal{M}$.

Zgled: $\mathbb{R}$ postane metričen prostor, če definiramo razdaljo števil $x, y \in \mathbb{R}$ kot

$$d(x, y) = |x - y|.$$

To je hkrati običajna razdalja med točkama na številski premici. $\Diamond$

Zgled: $\mathbb{C}$ postane metričen prostor, če definiramo razdaljo števil $z, w \in \mathbb{C}$ kot

$$d(z,w) = |z-w|.$$

$\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^2$ postane metričen prostor, če definiramo razdaljo

$$d\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}.$$

$\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^3$ z običajno razdaljo je spet metričen prostor, če definiramo

$$d\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+(x_3-y_3)^2}.$$

$\Diamond$

Zgled: Razdaljo v $\mathbb{R}^3$ lahko definiramo tudi takole:

$$d\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = \max\{|y_1-x_1|,|y_2-x_2|,|y_3-x_3|\}.$$

Lahko je videti, da d izpolnjuje vse zahteve o razdalji. $\Diamond$

Definicija 104 *Naj bo $(\mathcal{M},d)$ metričen prostor. Naj bo $a \in \mathcal{M}$ in $r > 0$.* ***Odprta krogla*** *s središčem v a in polmerom r je množica*

$$\mathcal{K}(a,r) = \{x \in \mathcal{M} : d(x,a) < r\}.$$

Zaprta krogla *s središčem v a in polmerom r je množica*

$$\overline{\mathcal{K}}(a,r) = \{x \in \mathcal{M} : d(x,a) \le r\}.$$

Krogli $\mathcal{K}(a,r)$ in $\overline{\mathcal{K}}(a,r)$ sta posebna primera okolic točke a.

Definicija 105 *Naj bo a točka v metričnem prostoru* $(\mathcal{M}, d)$. ***Okolica*** *točke a je vsaka takšna množica, ki vsebuje še neko kroglo s središčem a in s pozitivnim polmerom.*

Definicija 106 *Naj bo* $\mathcal{A}$ *množica točk v metričnem prostoru* $(\mathcal{M}, d)$.

i) točka $a \in \mathcal{M}$ *je notranja točka množice* $\mathcal{A}$, *če obstaja kakšna okolica točke a, ki je vsa vsebovana v* $\mathcal{A}$. *Torej pri notranji točki a obstaja še krogla* $\mathcal{K}(a, r) \subset \mathcal{A}$. *Jasno je, da je notranja točka vedno v množici* $\mathcal{A}$, *torej* $a \in \mathcal{A}$.

ii) točka $b \in \mathcal{M}$ *je zunanja točka za množico* $\mathcal{A}$, *če obstaja okolica točke b, ki ne vsebuje nobene točke iz* $\mathcal{A}$, *tj. se ne seka z* $\mathcal{A}$. *Torej pri zunanji točki b obstaja* $r > 0$, *da je* $\mathcal{K}(b, r) \cap \mathcal{A} = \emptyset$. *Jasno je, da zunanja točka ni nikoli v množici* $\mathcal{A}$, *torej* $b \notin \mathcal{A}$.

iii) točka $c \in \mathcal{M}$ *je robna točka za množico* $\mathcal{A}$, *če vsaka okolica točke c vsebuje vsaj eno točko iz* $\mathcal{A}$ *in vsaj eno točko, ki ni v* $\mathcal{A}$.

Vedno velja:

$$\mathcal{M} := \{\text{notranje točke}\} \cup \{\text{robne točke}\} \cup \{\text{zunanje točke}\}$$

Te množice so paroma disjunktne, saj za dano točko a vedno velja natanko ena od možnosti i), ii) ali iii).

Množico vseh notranjih točk za $\mathcal{A}$ imenujemo ***notranjost množice*** $\mathcal{A}$ in jo označimo z $\mathrm{Int}(\mathcal{A})$ oz. $\mathring{A}$. Vedno je $\mathrm{Int}\,\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$. Množico vseh robnih točk za množico $\mathcal{A}$ imenujemo ***rob množice*** $\mathcal{A}$ ali ***meja množice*** $\mathcal{A}$. Označimo ga z $\partial\mathcal{A}$. Točka roba $\partial\mathcal{A}$ je lahko v $\mathcal{A}$ ali pa tudi ne.

Zgled: $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ z običajno razdaljo.

$$\mathcal{A} = [a, b]$$

Notranjost množice $\mathcal{A}$: $\mathrm{Int}\,\mathcal{A} = (a, b)$,

rob množice $\mathcal{A}$: $\partial\mathcal{A} = \{a, b\}$, pri tem je $\partial\mathcal{A} \subset \mathcal{A}$, zunanje točke množice $\mathcal{A}$: $\{x : x < a, x > b\}$. $\Diamond$

Zgled: $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ z običajno razdaljo.

$$\mathcal{A} = (a, b)$$

Notranjost množice $\mathcal{A}$: $\operatorname{Int}\mathcal{A} = (a, b)$,

rob množice $\mathcal{A}$: $\partial\mathcal{A} = \{a, b\}$, pri tem $\mathcal{A} \cap \partial\mathcal{A} = \emptyset$,

zunanje točke množice $\mathcal{A}$: $\{x : x < a, x > b\}$. $\Diamond$

Zgled: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ z običajno razdaljo.

$$\mathcal{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}$$

Notranjost množice $\mathcal{A}$: $\operatorname{Int}\mathcal{A} = \mathcal{A}$,

rob množice $\mathcal{A}$: $\partial\mathcal{A} = \{(x, y) : x^2 + y^2 = 1\}$,

zunanje točke množice $\mathcal{A}$: $\{(x, y) : x^2 + y^2 > 1\}$. $\Diamond$

Zgled: $\mathcal{M} = \mathbb{R}^2$ z običajno razdaljo. Daljica v ravnini:

$$\mathcal{A} = (1, 3) \text{ na } \mathbb{R} \text{ gledana kot podmnožica } \mathbb{R}^2$$

Notranjost množice $\mathcal{A}$: $\operatorname{Int}\mathcal{A} = \emptyset$,

rob množice $\mathcal{A}$: $\partial\mathcal{A} = [1, 3]$,

zunanje točke množice $\mathcal{A}$: $\mathbb{R}^2 \setminus [1, 3]$. $\Diamond$

Označimo

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^C &= \mathcal{M} \setminus \mathcal{A} \\ &= \{x \in \mathcal{M} : x \notin \mathcal{A}\} \end{aligned}$$

Notranja točka za $\mathcal{A}$ je zunanja točka za $\mathcal{A}^C$. Zunanja točka za $\mathcal{A}$ je notranja točka za $\mathcal{A}^C$. Robna točka za $\mathcal{A}$ je robna točka za $\mathcal{A}^C$. Robna točka za $\mathcal{A}^C$ je tudi robna točka za $\mathcal{A}$. Torej

$$\partial\mathcal{A} = \partial(\mathcal{A}^C).$$

Definicija 107 *Množica $\mathcal{O}$ metričnega prostora $(\mathcal{M}, d)$ je* ***odprta****, če je vsaka njena točka notranja.*

Torej je $\mathcal{O}$ odprta natanko tedaj, ko je

$$\mathcal{O} = \operatorname{Int} \mathcal{O},$$

tj., ko za vsak $a \in \mathcal{O}$ obstaja $r > 0$, da je $\mathcal{K}(a, r) \subset \mathcal{O}$.

Definicija 108 *Množica $\mathcal{Z}$ metričnega prostora $(\mathcal{M}, d)$ je* ***zaprta****, če vsebuje vse svoje robne točke.*

Nobena točka odprte množice $\mathcal{O}$ ni robna točka. Torej so vse robne točke za $\mathcal{O}$, kolikor jih sploh je, v $\mathcal{O}^C$. Množica $\mathcal{O}^C$ tako vsebuje vse svoje robne točke, saj je $\partial\mathcal{O} = \partial\mathcal{O}^C$. Torej je $\mathcal{O}^C$ zaprta množica. Velja: če je $\mathcal{O}$ odprta, je $\mathcal{O}^C$ zaprta. Obratno: če je $\mathcal{A}^C$ zaprta, potem $\mathcal{A}^C$ vsebuje vse svoje robne točke, torej $\mathcal{A}^C$ vsebuje vse robne točke množice $\mathcal{A}$, saj je $\partial\mathcal{A} = \partial\mathcal{A}^C$. Množica $\mathcal{A}$ ne vsebuje nobene svoje robne točke in je sestavljena le iz notranjih točk, torej je $\mathcal{A}$ odprta. Torej $\mathcal{A}$ je odprta natanko tedaj, ko je $\mathcal{A}^C$ zaprta oz. $\mathcal{A}$ zaprta natanko tedaj, ko je $\mathcal{A}^C$ odprta.

Opomba: Odprtost ali zaprtost je posebna lastnost. Večina množic namreč ni niti odprtih niti zaprtih.

Zgled: (a, b) je odprta v $\mathbb{R}$, $[a, b]$ je zaprta v $\mathbb{R}$, $[a, b)$ oz. $(a, b]$ nista niti odprti niti zaprti v $\mathbb{R}$. $\Diamond$

Opomba: Celoten prostor $\mathcal{M}$ je hkrati odprta in zaprta množica. V skladu s prej povedanim razumemo, da je prazna množica $\emptyset = \mathcal{M}^C$ hkrati odprta in zaprta.

Zgled: $\mathcal{A} = [1, 3]$ kot podmnožica od $\mathbb{R}^2$. $\operatorname{Int} \mathcal{A} = \emptyset$, $\partial\mathcal{A} = [1, 3] = \mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ je torej zaprta. $\Diamond$

Zgled: $\mathcal{A} = (1,3)$ kot podmnožica od $\mathbb{R}^2$. $\operatorname{Int} \mathcal{A} = \emptyset$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, torej $\mathcal{A}$ ni odprta. $\partial\mathcal{A} = [1,3]$, $\mathcal{A}$ ni zaprta, saj sta točki 1 in 3 v robu, nista pa v $\mathcal{A}$. $\mathcal{A}$ torej ni niti odprta niti zaprta. $\Diamond$

Trditev 37 *Vsaka podmnožica metričnega prostora $(\mathcal{M}, d)$, z isto definicijo razdalje, je spet metričen prostor.*

Zgled: Naj bo $\mathcal{C}([a,b])$ množica zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a,b]$. Če je $f, g \in \mathcal{C}([a,b])$ je, $f - g \in \mathcal{C}([a,b])$. Funkcija $x \mapsto |f(x) - g(x)|$ je tedaj zvezna funkcija, ki na $[a,b]$, kot vemo, doseže svoj maksimum. Definirajmo razdaljo na naslednji način:

$$d(f,g) := \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - g(x)|\}, \qquad f, g \in \mathcal{C}([a,b]).$$

Tako definirana d ima lastnosti $i)$, $ii)$ in $iii)$. Preverimo te lastnosti:

$i)$ Ker je $|f(x)-g(x)| \geq 0$ za vsak $x \in [a,b]$, je tudi $d(f,g) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\} \geq 0$. Če je $d(f,g) = 0$, to pomeni, da je $\max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\} = 0$, torej $|f(x) - g(x)| = 0$ za vsak $x \in [a,b]$, torej je $f(x) = g(x)$, za vsak $x \in [a,b]$. Sledi, $f = g$.

$ii)$ Ker je $|g(x)-f(x)| = |f(x)-g(x)|$, je $d(f,g) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x)-g(x)|\} = \max_{x\in[a,b]}\{|g(x) - f(x)|\} = d(g,f)$.

$iii)$ Ker je $|f(x) - h(x)| \leq |f(x) - g(x)| + |g(x) - h(x)|$ za vsak $x \in [a,b]$ sledi, da za vsak $x \in [a,b]$ velja: $|f(x) - h(x)| \leq \max_{t\in[a,b]}\{|f(t) - g(t)|\} + \max_{t\in[a,b]}\{|g(t) - h(t)|\} = d(f,g) + d(g,h)$. Sledi $d(f,h) = \max_{x\in[a,b]}\{|f(x) - h(x)|\} \leq d(f,g) + d(g,h)$

Vse tri lastnosti so izpolnjene. Prostor zveznih funkcij tako postane metričen prostor. $\Diamond$

Izrek 98 *Naj bo $\mathcal{O}$ družina vseh odprtih množic metričnega prostora $(\mathcal{M}, d)$. Velja:*

O1 $\mathcal{M} \in \mathcal{O}$, $\emptyset \in \mathcal{O}$

O2 *Unija poljubne družine odprtih množic je spet odprta množica.*

O3 *Presek končnega števila odprtih množic je spet odprta množica.*

Dokaz:

O1 $\mathcal{M}$ je odprta. $\partial\mathcal{M} = \emptyset$, zato je $\partial\mathcal{M} \subset \mathcal{M}$, torej je $\mathcal{M}$ zaprta. Množica $\mathcal{M}$ je hkrati odprta in zaprta. Enako velja za $\emptyset$.

O2 Naj bo $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ družina odprtih množic. Naj bo $a \in \cup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{O}_\gamma$. Tedaj je $a \in \mathcal{O}_{\gamma_0}$ za nek $\gamma_0 \in \Gamma$. Ker je $\mathcal{O}_{\gamma_0}$ odprta, obstaja $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{O}_{\gamma_0}$. Sledi $\mathcal{K}(a,r) \subset \cup_{\gamma\in\mathcal{M}}\mathcal{O}_\gamma$. Torej je unija res odprta.

O3 Naj bosta $\mathcal{O}_1$ in $\mathcal{O}_2$ odprti. Če je $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2 = \emptyset$ ni kaj dokazovati. Naj bo $a \in \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. Ker je $\mathcal{O}_1$ odprta, obstaja $r_1 > 0$, da je $\mathcal{K}(a,r_1) \subset \mathcal{O}_1$, ker je $\mathcal{O}_2$ odprta, obstaja $r_2 > 0$, da je $\mathcal{K}(a,r_2) \subset \mathcal{O}_2$. Naj bo $r = \min\{r_1, r_2\}$. Tedaj je $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{K}(a,r_1) \subset \mathcal{O}_1$ in $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{K}(a,r_2) \subset \mathcal{O}_2$, torej $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$. Torej je množica $\mathcal{O}_1 \cap \mathcal{O}_2$ res odprta.

$\square$

Izrek 99 *Naj bo $\mathcal{Z}$ družina vseh zaprtih množic metričnega prostora $(\mathcal{M}, d)$. Velja:*

Z1 $\mathcal{M} \in \mathcal{Z}$, $\emptyset \in \mathcal{Z}$.

Z2 *Unija končnega števila zaprtih množic je spet zaprta množica.*

Z3 *Presek poljubne družine zaprtih množic je spet zaprta množica.*

Dokaz: Dokaz je podoben dokazu prejšnjega izreka. Prevedemo na komplemente in upoštevamo, da je

$$\left(\bigcup_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{Z}_\gamma\right)^C = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{Z}_\gamma^C.$$

$\square$

Trditev 38 *Vsaka odprta krogla $\mathcal{K}(a,r)$ v $(\mathcal{M}, d)$ je odprta množica.*

Dokaz: Naj bo dana odprta krogla $\mathcal{K}(a,r)$, $r>0$. Naj bo $x \in \mathcal{K}(a,r)$. Tedaj je $d(a,x) < r$. Naj bo $0 < \rho < r - d(a,x)$. Če je $y \in \mathcal{K}(x,\rho)$, je $d(y,a) \leq d(y,x) + d(x,a) \leq \rho + d(x,a) < r$. Torej je $\mathcal{K}(x,\rho) \subset \mathcal{K}(a,r)$. Torej krogla $\mathcal{K}(a,r)$ je odprta. □

Trditev 39 *Za vsak $a \in \mathcal{M}$ in $r > 0$ je množica $\{x \in \mathcal{M} : d(a,x) > r\}$ odprta, torej je komplement zaprte krogle $\overline{\mathcal{K}}(a,r)$ odprta množica.*

Dokaz: Ista ideja kot prej. □

Trditev 40 *Vsaka zaprta krogla $\overline{\mathcal{K}}(a,r)$ v $(\mathcal{M},d)$ je zaprta množica.*

Dokaz: Zaprta krogla je komplement odprte množice iz prejšnjega primera. □

Na osnovi znanih primerov bi pričakovali, da je notranjost zaprte krogle vedno odprta krogla z enakim polmerom. V splošnem je to bolj zapleteno.

Zgled: Naj bo $\mathcal{M} = \{a,b,c\}$, kjer so a,b,c oglišča enakostraničnega trikotnika s stranico 1. Tedaj je: $\mathcal{K}(a,1) = \{a\}$, $\overline{\mathcal{K}}(a,1) = \mathcal{M}$. $\operatorname{Int} \overline{\mathcal{K}}(a,1) = \mathcal{M} \neq \mathcal{K}(a,1)$. Torej $\partial \mathcal{K}(a,1) = \emptyset$. ◊

Definicija 109 *Množica $\mathcal{A}$ metričnega prostora je **omejena**, če vsa leži v kakšni (dovolj veliki) krogli.*

Definicija 110 *Točka a metričnega prostora $\mathcal{M}$ je **stekališče** množice $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$, če vsaka okolica točke a vsebuje neskončno točk množice $\mathcal{A}$.*

Opomba: Očitno je, da imajo stekališča le neskončne množice.

Zgled: Naj bo $\mathcal{A} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\} \subset \mathbb{R} = \mathcal{M}$. 0 je stekališče množice $\mathcal{A}$. ◊

Zgled: Naj bo $\mathcal{A} = (a,b) \subset \mathbb{R} = \mathcal{M}$. Vsaka točka iz $[a,b]$ je stekališče množice $\mathcal{A}$. ◊

Izrek 100 *Točka $a \in \mathcal{M}$ je stekališče množice $\mathcal{A}$ natanko tedaj, ko vsaka okolica točke a vsebuje vsaj eno od a različno točko iz množice $\mathcal{A}$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Če je a stekališče množice $\mathcal{A}$, tedaj vsaka okolica od a vsebuje neskončno točk iz $\mathcal{A}$, torej gotovo vsaj eno od a različno točko iz množice $\mathcal{A}$.

($\Leftarrow$) Naj bo $a \in \mathcal{M}$ takšna točka, da vsaka njena okolica vsebuje vsaj eno od a različno točko iz $\mathcal{A}$. Naj bo $\mathcal{U}$ poljubna okolica točke a. Torej obstaja $r > 0$, da je $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{U}$. Po predpostavki obstaja $a_1 \in \mathcal{K}(a,r)$, $a_1 \in \mathcal{A}$, $a_1 \neq a$. Ker je $a_1 \neq a$, je $d(a,a_1) = r_1 > 0$. Po predpostavki obstaja $a_2 \in \mathcal{K}(a,r_1)$, $a_2 \in \mathcal{A}$, $a_2 \neq a$. Jasno je $a_2 \neq a_1$, saj je $d(a,a_2) < d(a,a_1)$, ... S tem nadaljujemo in dobimo zaporedje $a_1, a_2, \ldots$ med seboj različnih točk množice $\mathcal{A}$, ki so vse vsebovane v $\mathcal{U}$, torej je a res stekališče množice $\mathcal{A}$. □

Posledica 38 *Množica $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \neq \emptyset$, v metričnem prostoru, je zaprta natanko tedaj, ko vsebuje vsa svoja stekališča.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Iz definicije stekališča je jasno, da je stekališče notranja ali robna točka množice $\mathcal{A}$. Če je $\mathcal{A}$ zaprta, potem vsebuje vse svoje robne točke, torej zagotovo vsebuje vsa svoja stekališča.

($\Leftarrow$) Naj $\mathcal{A}$ ne bo zaprta. Tedaj obstaja robna točka a množice $\mathcal{A}$, ki ni v $\mathcal{A}$. V vsaki okolici robne točke so točke iz $\mathcal{A}$ in točke iz $\mathcal{A}^C$. Ker točke a ni v $\mathcal{A}$, je torej v vsaki okolici točke a vsaj ena od a različna točka iz množice $\mathcal{A}$. To pomeni, da je točka a stekališče množice $\mathcal{A}$, ki pa seveda ni v $\mathcal{A}$. Torej obstaja stekališče množice $\mathcal{A}$, ki ni v $\mathcal{A}$. □

8.2 Zaporedja točk v metričnih prostorih

Definicija 111 ***Zaporedje*** *v metričnem prostoru $\mathcal{M}$ je preslikava z $\mathbb{N}$ v $\mathcal{M}$. Če pripada številu $n \in \mathbb{N}$ točka $a_n \in \mathcal{M}$, imenujemo a_n n-ti člen zaporedja.*

Definicija 112 *Točka $a \in \mathcal{M}$ je stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, če vsaka (še tako majhna) okolica točke a vsebuje neskončno členov zaporedja a_n, tj., če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $a_n \in \mathcal{K}(a,\varepsilon)$ za neskončno n-jev, tj., če za vsak $\varepsilon > 0$ velja $d(a_n,a) < \varepsilon$ za neskončno n-jev.*

Koristno si je zapomniti, da $x \in \mathcal{K}(a, \varepsilon)$ pomeni, da je $d(a, x) < \varepsilon$.

Definicija 113 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru $\mathcal{M}$ **konvergira** k $a \in \mathcal{M}$, če vsaka okolica točke a vsebuje vse a_n od nekega naprej, tj., če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja $n_0 \in \mathbb{N}$, da je $d(a_n, a) < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$.*

Opomba: Če je $\mathcal{M} = \mathbb{R}$ in $d(x, y) = |x - y|$ običajna razdalja, sta zgornji definiciji običajni definiciji stekališča in konvergence, ki ju že poznamo.

Definicija 114 *Če zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $a \in \mathcal{M}$, tedaj točko a imenujemo limita zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ in pišemo*

$$a = \lim_{n \to \infty} a_n.$$

Trditev 41 *Če je $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, tedaj je seveda a tudi stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Obratno v splošnem ni res. Zaporedje ima lahko več stekališč. Če je zaporedje konvergentno, je limita ena sama in je edino stekališče zaporedja.*

Dokaz: Recimo, da bi imelo konvergentno zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ poleg a še eno stekališče, npr. b, $b \neq a$. Naj bo $\rho = d(a, b)$ in $\varepsilon = \rho/2$. Ker je $a = \lim_{n \to \infty} a_n$, obstaja n_0, da je $d(a_n, a) < \varepsilon$, za vse $n \geq n_0$. To pa pomeni, da noben a_n z indeksom $n \geq n_0$ ne leži v krogli $\mathcal{K}(b, \varepsilon)$, saj je:

$$\begin{aligned} d(a_n, b) &\geq d(a, b) - d(a_n, a) \\ &\geq d(a, b) - \varepsilon \\ &= 2\varepsilon - \varepsilon \\ &= \varepsilon, \end{aligned}$$

za vsak $n \geq n_0$. Torej a_n ne ležijo v $\mathcal{K}(b, \varepsilon)$, tj. $a_n \notin \mathcal{K}(b, \varepsilon)$, za vsak $n \geq n_0$. Torej v $\mathcal{K}(b, \varepsilon)$ leži le končno mnogo a_n-jev, torej b ne more biti stekališče. $\square$

Definicija 115 *Zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ v metričnem prostoru $\mathcal{M}$ izpolnjuje **Cauchyjev pogoj**, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $d(a_n, a_m) < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$.*

Opomba: Zaporedju, ki izpolnjuje Cauchyjev pogoj, pogosto pravimo tudi Cauchyjevo zaporedje.

Izrek 101 *Vsako konvergentno zaporedje izpolnjuje Cauchyjev pogoj.*

Dokaz: Naj bo $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ in $\varepsilon > 0$. Obstaja n_0, da je $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ za vse $n \geq n_0$. Če je torej $n \geq n_0$ in $m \geq n_0$, je

$$\begin{aligned} d(a_n, a_m) &\leq d(a_n, a) + d(a, a_m) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

□

Za zaporedja v $\mathbb{R}$ vemo, da konvergirajo natanko tedaj, ko izpolnjujejo Cauchyjev pogoj. Za metrične prostore v splošnem to ne velja.

Zgled: Naj bo $\mathcal{M} = \{1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots\}$. V njem je zaporedje $1, 1/2, 1/3, 1/4, \ldots$, ki je jasno Cauchyjevo, nima pa limite (v $\mathcal{M}$), saj število 0, ki je edini kandidat za limito, ni v $\mathcal{M}$. ♢

Zgled: Naj bo $\mathcal{M} = \mathbb{Q}$. Tu je dosti Cauchyjevih zaporedij brez limit. Naj bo $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ zaporedje decimalnih približkov za $\sqrt{2}$. To zaporedje je očitno Cauchyjevo, nima pa limite (v $\mathbb{Q}$). ♢

Definicija 116 *Metričen prostor $\mathcal{M}$ je* ***poln****, če je v njem vsako Cauchyjevo zaporedje konvergentno, tj., če je Cauchyjev pogoj (tudi) zadosten za konvergenco (je torej potreben in zadosten).*

Vemo že, da sta $\mathbb{R}$ in $\mathbb{C}$ polna prostora. Tudi $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, z običajno razdaljo je poln.

Lema 1 *Naj bo $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ prostor zveznih funkcij na zaprtem intervalu $[a,b]$ s standardno metriko*

$$d(f,g) = \max_{x\in[a,b]} \{|f(x) - g(x)|\}.$$

Tedaj zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f natanko tedaj, ko $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f enakomerno na $[a,b]$.

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f v $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$. To pomeni, da za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $d(f_n, f) < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, tj. $\max_{x\in[a,b]}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, torej $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in [a,b]$. To pomeni enakomerno konvergenco.

($\Leftarrow$) Naj $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ enakomerno konvergira k f na $[a,b]$. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$ in vse $x \in [a,b]$. Torej $\max_{x\in[a,b]}\{|f_n(x) - f(x)|\} < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$, tj. $d(f_n, f) < \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. $\square$

Izrek 102 *Prostor $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ s standardno metriko je poln.*

Dokaz: Naj bo zaporedje $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo v $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$. Torej za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je razdalja $d(f_n, f_m) < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$ oz. $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$ in vse $x \in [a,b]$. Torej je za vse $x \in [a,b]$ številsko zaporedje $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo zaporedje. Ker je v $\mathbb{R}$ Cauchyjev pogoj zadosten za konvergenco, sledi, da za vsak $n \geq n_0$ in vse $x \in [a,b]$ številsko zaporedje $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira. Označimo njegovo limito z $f(x)$. Fiksirajmo $x \in [a,b]$ in $n \geq n_0$ in v $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ pošljimo $m \to \infty$. Dobimo $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ za vse $n \geq n_0$. Isto naenkrat velja za vsak $x \in [a,b]$, tj. dobili smo, da za $\varepsilon > 0$ obstaja n_0, da je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ za vse $n, m \geq n_0$ in vse $x \in [a,b]$.

Torej $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f enakomerno, od koder po izreku sledi, da $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k f v prostoru $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$. $\square$

8.3 Kompaktne množice in kompaktni prostori

Ponovimo najprej že dokazani pomožni izrek o pokritju zaprtega intervala z odprtimi intervali:

Izrek 103 (pomožni – o pokritjih) *Naj bo za vsak $x \in [a,b]$ dano število $\delta(x) > 0$. Obstaja končno mnogo $x_1, x_2, \ldots, x_p$, da intervali $\big(x_1 - \delta(x), x_1 + \delta(x)\big)$, $\big(x_2 - \delta(x), x_2 + \delta(x)\big)$, ..., $\big(x_p - \delta(x), x_p + \delta(x)\big)$ pokrijejo $[a,b]$.*

Definicija 117 *Naj bo $\mathcal{M}$ metričen prostor in $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$. Družina $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ podmnožic prostora $\mathcal{M}$ je* ***pokritje*** *za $\mathcal{K}$, če je $\mathcal{K} \subset \cup_{\gamma\in\Gamma}\mathcal{A}_\gamma$. Če so vse množice $\mathcal{A}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$, odprte, je to* ***odprto pokritje****. Če so vse množice $\mathcal{A}_\gamma$, $\gamma \in \Gamma$,* *zaprte, je to* ***zaprto pokritje****. Če je v družini le končno množic, je to* ***končno pokritje****. Podpokritje pokritja* $\{\mathcal{A}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *je vsaka poddružina, ki pokrije* $\mathcal{K}$*, tj. katere unija vsebuje* $\mathcal{K}$*.*

Definicija 118 *Množica* $\mathcal{K}$ *metričnega prostora* $\mathcal{M}$ *je* ***kompaktna****, če vsako odprto pokritje* $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *množice* $\mathcal{K}$ *vsebuje končno podpokritje, ki pokrije* $\mathcal{K}$*, tj., če lahko iz vsake družine* $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ *odprtih množic prostora* $\mathcal{M}$*, katerih unija vsebuje* $\mathcal{K}$*, izberemo končno poddružino, katere unija vsebuje* $\mathcal{K}$*, tj. obstajajo* $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_k \in \Gamma$*, da je* $\mathcal{K} \subset \mathcal{O}_{\gamma_1} \cup \mathcal{O}_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{\gamma_k}$*.*

Opomba: Vsaka končna množica je kompaktna. Vsak zaprt interval na številski premici je kompaktna množica. To je preprosta posledica pomožnega izreka o pokritjih.

Zgled: Naj bo $\mathcal{K} = \mathbb{R}$ s standardno metriko. Tedaj je $\{(-n, n) : n \in \mathbb{N}\}$ tj. odprto pokritje za $\mathcal{K}$, ki nima končnega podpokritja. $\diamondsuit$

Zgled: $(1, 4)$ ni kompaktna množica. Družina $\{(1 + 1/n, 4 - 1/n) : n \in \mathbb{N}\}$ je odprto pokritje za $(1, 4)$, ki nima končnega podpokritja. $\diamondsuit$

Včasih je že kar ves prostor $\mathcal{M}$ kompakten.

Zgled: $[a, b]$ s standardno metriko. Premisli!

Izrek 104 *Vsaka kompaktna množica metričnega prostora je omejena in zaprta.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$ kompaktna množica. Naj bo $a \in \mathcal{A}$. Oglejmo si družino odprtih krogel $\{\mathcal{K}(a, r) : r > 0\}$. Unija teh krogel je ves prostor, torej vsebuje množico $\mathcal{A}$. $\{\mathcal{K}(a, r) : r > 0\}$ je torej odprto pokritje za $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ kompaktna, pa že končno mnogo teh krogel pokriva $\mathcal{A}$, tj. obstajajo $r_1, r_2, \ldots, r_n$, da je $\mathcal{A} \subset \big(\mathcal{K}(a, r_1) \cup \mathcal{K}(a, r_2) \cup \ldots \cup \mathcal{K}(a, r_n)\big)$. Če je $r = \max\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$, je $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}(a, r)$, kar pomeni, da je $\mathcal{A}$ omejena. (Množica je namreč omejena, kadar je vsebovana v neki krogli.)

Naj bo $\mathcal{A}$ kompaktna. Naj bo $a \in \mathcal{A}^C = \mathcal{M} \setminus \mathcal{A}$. Pokažemo, da obstaja okolica točke a, ki se ne seka z $\mathcal{A}$. To bo pomenilo, da je $\mathcal{A}^C$ odprta oz., da je $\mathcal{A}$ zaprta. Za vsak $r > 0$ je množica $\mathcal{O}_r = \{x \in \mathcal{M} : d(a,x) > r\}$ odprta. Unija družine množic $\{\mathcal{O}_r, r > 0\}$ je ves prostor $\mathcal{M}$, razen točke a. Ker točka a ni v naši množici $\mathcal{A}$, to pomeni, da je $\mathcal{A} \subset \cup_{r>0}\mathcal{O}_r$, da je torej $\{\mathcal{O}_r, r > 0\}$ odprto pokritje za $\mathcal{A}$. Ker je $\mathcal{A}$ kompaktna, obstajajo $r_1, r_2, \ldots, r_n$, da je $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_{r_1} \cup \mathcal{O}_{r_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{r_n}$. Naj bo $r = \min\{r_1, r_2, \ldots, r_n\}$. Tedaj je $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_r$, saj je $\mathcal{O}_{r_i} \subset \mathcal{O}_r$ za vse i. Ker je $\mathcal{A} \subset \mathcal{O}_r$, je $d(a,x) > r$ za vse $x \in \mathcal{A}$. To pomeni, da iz $d(a,x) < r$ sledi $x \notin \mathcal{A}$. Torej $\mathcal{K}(a,r) \subset \mathcal{A}^C$. Sledi, da je $\mathcal{A}^C$ odprta, torej $\mathcal{A}$ zaprta množica. $\square$

Izrek 105 *Vsaka zaprta podmnožica $\mathcal{Z}$ kompaktne množice $\mathcal{K}$ je kompaktna.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{Z}$, $\mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$, zaprta, $\mathcal{K}$ kompaktna. $\mathcal{Z}^C$ je odprta. Naj bo $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ odprto pokritje za $\mathcal{Z}$. Tedaj je družina $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma, \mathcal{Z}^C\}$ odprto pokritje za $\mathcal{K}$. $\mathcal{K}$ je kompaktna, torej obstaja končno podpokritje $\mathcal{O}_{\gamma_1} \cup \mathcal{O}_{\gamma_2} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{\gamma_n}$, tako da $\mathcal{O}_{\gamma_1} \cup \mathcal{O}_{\gamma_2} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{\gamma_n}$ in morda $\mathcal{Z}^C$ pokrivajo $\mathcal{K}$. Ker je $\mathcal{Z} \subset \mathcal{K}$ in $\mathcal{Z}^C$ torej ne vsebuje nobene točke iz $\mathcal{Z}$, je $\mathcal{Z} \subset \mathcal{O}_{\gamma_1} \cup \mathcal{O}_{\gamma_2} \cup \ldots \cup \mathcal{O}_{\gamma_n}$. To pomeni, da je $\mathcal{Z}$ kompaktna. $\square$

Opomba: Vsaka kompaktna množica je omejena in zaprta. Obratno v splošnem ni res. Je pa res na $\mathbb{R}$.

Izrek 106 *Množica $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ je kompaktna natanko tedaj, ko je omejena in zaprta.*

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Jasno od prej, izrek 104.

$(\Leftarrow)$ Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ omejena in zaprta. Ker je $\mathcal{K}$ omejena, obstaja $M < \infty$, da je $\mathcal{K} \subset [-M, M]$. Iz pomožnega izreka o pokritjih vemo, da je vsak zaprti interval kompaktna množica. Ker je $\mathcal{K}$ zaprta podmnožica kompaktne množice $[-M, M]$, sledi, da je $\mathcal{K}$ kompaktna. $\square$

Izrek 107 *Vsaka neskončna množica točk, ki leži v kompaktni množici metričnega prostora, ima vsaj eno stekališče.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{A}$, $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$, neskončna množica in $\mathcal{K}$ kompaktna. Recimo, da nobena točka iz $\mathcal{K}$ ni stekališče množice $\mathcal{A}$. Naj bo $x \in \mathcal{K}$. Ker x ni stekališče, obstaja $r(x) > 0$, da je $\mathcal{A} \cap \mathcal{K}\big(x, r(x)\big)$ končna. Družina $\{\mathcal{K}\big(x, r(x)\big) : x \in \mathcal{K}\}$ je odprto pokritje za $\mathcal{K}$. Torej obstaja končno podpokritje, saj je $\mathcal{K}$ kompaktna. $\mathcal{K} \subset \Big(\mathcal{K}\big(x_1, r(x_1)\big), \ldots, \mathcal{K}\big(x_n, r(x_n)\big)\Big)$. Ta unija pa je unija končnih množic. Sledi, da je $\mathcal{A}$ končna množica. Prišli smo v protislovje. Torej ima $\mathcal{A}$ vsaj eno stekališče. $\square$

Ker je vsako stekališče množice $\mathcal{A} \subset \mathcal{K}$ hkrati tudi stekališče za $\mathcal{K}$ in ker je $\mathcal{K}$ zaprta, $\mathcal{K}$ vsebuje vsa svoja stekališča. Torej so vsa stekališča množice $\mathcal{A}$ vsebovana v $\mathcal{K}$.

Izrek 108 *Naj vsi členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležijo v kompaktni množici $\mathcal{K}$. Tedaj ima zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vsaj eno stekališče.*

Dokaz: Kot prej, je stekališče, če obstaja, vsebovano v $\mathcal{K}$. Recimo, da nobena točka iz $\mathcal{K}$ ni stekališče zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Ker x ni stekališče, obstaja $r(x) > 0$, da $\mathcal{K}\big(x, r(x)\big)$ vsebuje največ končno mnogo a_n-jev. To velja za vsak x. $\{\mathcal{K}\big(x, r(x)\big) : x \in \mathcal{K}\}$ je odprto pokritje za množico $\mathcal{K}$, zato obstaja končno podpokritje $\mathcal{K} \subset \Big(\mathcal{K}\big(x_1, r(x_1)\big), \ldots, \mathcal{K}\big(x_n, r(x_n)\big)\Big)$. Torej $\mathcal{K}$ vsebuje največ končno mnogo a_n-jev. Prišli smo v protislovje. $\square$

Posledica 39 *Naj vsi členi zaporedja $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ležijo v kompaktni množici $\mathcal{K}$. Tedaj ima zaporedje $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergentno podzaporedje.*

Dokaz: Vemo, da ima $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vsaj eno stekališče. Označimo ga z a. Naj bo $r > 0$. Ker je a stekališče, neskončno členov leži v $\mathcal{K}(a, r)$, torej lahko izberemo $a_{k_1} \in \mathcal{K}(a, r)$. Podobno, ker je neskončno členov v $\mathcal{K}(a, r/2)$ izberemo $a_{k_2} \in \mathcal{K}(a, r/2)$, podobno, ker je neskončno členov v $\mathcal{K}(a, r/4)$ izberemo $a_{k_3} \in \mathcal{K}(a, r/4)$, $\ldots$, $a_{k_n} \in \mathcal{K}(a, r/2^{n-1})$. Ker je $\lim_{n\to\infty} d(a_{k_n}, a) = 0$, to pomeni $\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = a$. $\square$

Izrek 109 *Vsak kompakten metričen prostor je poln.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{M}$ kompakten metričen prostor in $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ poljubno Cauchyjevo zaporedje. Pokažemo, da $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira. Po prejšnjem izreku ima $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ vsaj eno stekališče. Da zaporedje konvergira pa sledi iz naslednjega izreka.

Izrek 110 (pomožni) *Če ima Cauchyjevo zaporedje stekališče a, je konvergentno in a je njegova limita.*

Dokaz: Naj bo $\varepsilon > 0$. Ker je $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo, obstaja n_0, da je $d(a_n, a_m) < \varepsilon/2$ za vse $n, m \geq n_0$. Ker pa je a stekališče, velja, da je $d(a_n, a) < \varepsilon/2$ za neskončno mnogo n-jev. Torej obstaja $m \geq n_0$, da velja $d(a_m, a) < \varepsilon/2$. Če je torej $n \geq n_0$, je potem

$$\begin{aligned} d(a, a_n) &\leq d(a_m, a) + d(a_m, a_n) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

Torej $\lim_{n\to\infty} a_n = a$. □

Opomba: $\mathbb{R}$ ni kompakten prostor (ker ni omejen). Ima pa vsaka točka $x \in \mathbb{R}$ okolico $[x-r, x+r]$, ki je kompaktna. Prostori, ki niso kompaktni, vsaka točka pa ima kompaktno okolico, imenujemo ***lokalno kompaktni prostori***.

8.4 Podprostori metričnega prostora

Naj bo $(\mathcal{M}, d)$ metričen prostor in $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}$. Tedaj je $(\mathcal{A}, d)$ z isto razdaljo spet metričen prostor.

$$\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a, r) = \{x \in \mathcal{A} : d(x, a) < r\} = \mathcal{K}(a, r) \cap \mathcal{A}$$

Izrek 111 *Množica $\mathcal{O}' \subset \mathcal{A}$ je odprta v prostoru $(\mathcal{A}, d)$ natanko tedaj, ko je oblike $\mathcal{O} \cap \mathcal{A}$, kjer je $\mathcal{O}$ odprta v $(\mathcal{M}, d)$.*

Dokaz: $(\Rightarrow)$ Naj bo $\mathcal{O} \subset (\mathcal{M}, d)$ odprta. Za vsak $a \in \mathcal{O}$ obstaja $r_a > 0$, da je $\mathcal{K}(a, r_a) \subset \mathcal{O}$. Torej je $\mathcal{O} = \cup_{a \in \mathcal{O}} \mathcal{K}(a, r_a)$. Če je $\mathcal{O}' \subset (\mathcal{A}, d)$ odprta, je enako

$\mathcal{O}' = \cup_{a\in\mathcal{O}'}\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a,r_a)$. Naj bo $\mathcal{O}'$ odprta v $\mathcal{A}$. Definirajmo $\mathcal{O} = \cup_{a\in\mathcal{O}'}\mathcal{K}(a,r_a)$. To je odprta množica v $(\mathcal{M},d)$. Jasno je

$$\begin{aligned}\mathcal{O}\cap\mathcal{A} &= \left(\bigcup_{a\in\mathcal{O}'}\mathcal{K}(a,r_a)\right)\cap\mathcal{A}\\ &= \bigcup_{a\in\mathcal{O}'}(\mathcal{K}(a,r)\cap\mathcal{A})\\ &= \bigcup_{a\in\mathcal{O}}\mathcal{K}_{\mathcal{A}}(a,r_a)\\ &= \mathcal{O}'\end{aligned}$$

Tako smo našli odprto množico $\mathcal{O}$ v $(\mathcal{M},d)$, da je $\mathcal{O}\cap\mathcal{A} = \mathcal{O}'$.

($\Leftarrow$) Podobno. □

Izrek 112 *Množica $\mathcal{Z}' \subset \mathcal{A}$ je zaprta v prostoru $(\mathcal{A},d)$ natanko tedaj, ko je oblike $\mathcal{Z}\cap\mathcal{A}$, kjer je $\mathcal{Z}$ zaprta v $(\mathcal{M},d)$.*

Dokaz: Podobno kot prej (s prehodom na komplemente). □

Izrek 113 *Množica $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$ je kompaktna v $(\mathcal{A},d)$ natanko tedaj, ko je kompaktna v $(\mathcal{M},d)$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $\mathcal{K}$ kompaktna v $(\mathcal{A},d)$. Naj bo $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ pokritje za $\mathcal{K}$, kjer so $\mathcal{O}_\gamma$ odprte v $(\mathcal{A},d)$. Tedaj so $\mathcal{O}'_\gamma = \mathcal{O}_\gamma\cap\mathcal{A}$ odprte v $(\mathcal{A},d)$ in pokrivajo $\mathcal{K}$. Ker je $\mathcal{K}$ kompaktna v $(\mathcal{A},d)$, obstaja končno podpokritje, tj.

$$\mathcal{K}\subset\mathcal{O}'_{\gamma_1}\cup\mathcal{O}'_{\gamma_2}\cup\ldots\cup\mathcal{O}'_{\gamma_n}\subset\mathcal{O}_{\gamma_1}\cup\mathcal{O}_{\gamma_2}\cup\ldots\cup\mathcal{O}_{\gamma_n}.$$

Torej je $\mathcal{K}$ res kompaktna v $(\mathcal{M},d)$.

($\Leftarrow$) Naj bo $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$ kompaktna v $(\mathcal{M},d)$. Naj bo $\{\mathcal{O}'_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ pokritje za $\mathcal{K}$, kjer so $\mathcal{O}'_\gamma$ odprte v $(\mathcal{M},d)$. Po izreku velja: za vsak γ obstaja $\mathcal{O}_\gamma$ odprta v $(\mathcal{M},d)$, da je $\mathcal{O}'_\gamma = \mathcal{O}_\gamma\cap\mathcal{A}$. Ker je $\{\mathcal{O}'_\gamma\}$ pokritje množice $\mathcal{K}$, je $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma\in\Gamma\}$ toliko bolj pokritje množice $\mathcal{K}$ v $(\mathcal{M},d)$. Ker je $\mathcal{K}$ kompaktna v $(\mathcal{M},d)$, obstaja končno podpokritje, da je $\mathcal{K}\subset\left(\mathcal{O}_{\gamma_1}\cup\mathcal{O}_{\gamma_2}\cup\ldots\cup\mathcal{O}_{\gamma_n}\right)$. Sledi: ker je $\mathcal{K}\subset\mathcal{A}$, je

$$\begin{aligned}\mathcal{K}\subset\mathcal{A}\cap\left(\mathcal{O}_{\gamma_1}\cup\mathcal{O}_{\gamma_2}\cup\ldots\cup\mathcal{O}_{\gamma_n}\right) &= (\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\gamma_1})\cup\ldots\cup(\mathcal{A}\cap\mathcal{O}_{\gamma_n})\\ &= \mathcal{O}'_{\gamma_1}\cup\ldots\cup\mathcal{O}'_{\gamma_n}.\end{aligned}$$

Torej je $\mathcal{K}$ res kompaktna v $(\mathcal{A},d)$. □

8.5 Preslikave med metričnimi prostori

Naj bosta $(\mathcal{M}, d)$ in $(\mathcal{M}', d')$ dva metrična prostora in $\mathcal{D}$ neprazna množica točk v $\mathcal{M}$. Naj bo dana preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$. Tedaj imenujemo $\mathcal{D}$ definicijsko območje preslikave. Za vsak $x \in \mathcal{D}$, je $f(x) \in \mathcal{M}'$ natančno določena. Če je $\mathcal{M}' = \mathbb{R}$ ali $\mathcal{M}' = \mathbb{C}$, tako preslikavo običajno imenujemo funkcija.

Definicija 119 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je **zvezna** v točki $x_0 \in \mathcal{D}$, če za vsak (še tako majhen) $\varepsilon > 0$, obstaja $\delta > 0$, da je $d'\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$, čim je $d(x, x_0) < \delta$ in $x \in \mathcal{D}$.*

Definicija je prav takšna kot pri funkcijah, tj. sliki sta poljubno blizu, če sta le originala dovolj blizu.

Definicija 120 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna v točki $x_0 \in \mathcal{D}$, če za vsako okolico $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}'$ slike $f(x_0) = y_0$, obstaja okolica $\mathcal{U} \subset \mathcal{M}$ prvotne točke x_0 v $\mathcal{M}$, da je $f(\mathcal{U} \cap \mathcal{D}) \subset \mathcal{V}$, tj. da se vsaka točka iz definicijskega območja $\mathcal{D}$, ki leži v okolici $\mathcal{U}$, preslika v $\mathcal{V}$.*

Jasno je, da iz te definicije sledi prejšnja.

Definicija 121 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna v $x_0 \in \mathcal{D}$, če za vsako okolico $\mathcal{V}$ slike $f(x_0) = y_0$ obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke x_0, v $(\mathcal{D}, d)$, da je $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$.*

Vse tri definicije predstavljajo posplošitev s števil na poljuben metričen prostor.

Kot pri funkcijah $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, velja tudi tu karakterizacija zveznosti z zaporedji.

Izrek 114 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna v točki $x_0 \in \mathcal{D}$ natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathcal{D}$, ki konvergira k x_0, zaporedje $\{f(x_n)\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira k $f(x_0)$.*

Dokaz: Podobno kot pri funkcijah. $\square$

Definicija 122 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna na $\mathcal{D}$, če je zvezna v vsaki točki $\mathcal{D}$.*

Opomba: Če je $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$ zvezna, je seveda zožitev $f|_{\mathcal{D}} : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ zvezna za vsak $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$. Zveznost je v bistvu karakterizirana samo z razdaljo, preslikavo že imamo od prej!

Zveznost smo že znali definirati z okolicami v $(\mathcal{D}, d)$. Spomnimo se, da so odprte množice v $(\mathcal{D}, d)$ preseki odprtih množic v $\mathcal{M}$ z množico $\mathcal{D}$.

Izrek 115 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna natanko tedaj, ko je praslika $f^{-1}(\mathcal{O}')$, tj. $\{x \in \mathcal{D} : f(x) \in \mathcal{O}'\}$, vsake odprte množice $\mathcal{O}' \subset \mathcal{M}'$, odprta množica v $(\mathcal{D}, d)$.*

Dokaz: ($\Rightarrow$) Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ zvezna. Naj bo $\mathcal{O}' \subset \mathcal{M}'$ odprta in $\mathcal{O} = f^{-1}(\mathcal{O}')$. Pokažemo, da je $\mathcal{O}$ odprta. Če je $\mathcal{O}$ prazna je $\mathcal{O}$ odprta, saj je prazna množica vedno odprta. Naj bo $x_0 \in \mathcal{O}$, torej $f(x_0) \in \mathcal{O}'$. Ker je $\mathcal{O}'$ odprta, obstaja okolica $\mathcal{V}$ točke $y_0 = f(x_0)$, ki vsa leži v $\mathcal{O}'$. Ker pa je f zvezna v x_0, pa vemo, da obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke x_0 v $(\mathcal{D}, d)$, ki se vsa preslika s f v $\mathcal{V}$. Torej $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{O}'$. Torej je $\mathcal{U}$ vsebovan v $f^{-1}(\mathcal{O}')$. Torej je x_0 notranja točka praslike $f^{-1}(\mathcal{O}') = \mathcal{O}$. Ker je $x_0 \in \mathcal{O}$ poljuben, je vsaka točka iz $\mathcal{O}$ notranja točka, torej je $\mathcal{O}$ odprta.

($\Leftarrow$) Naj bo $f^{-1}(\mathcal{O}')$ odprta v $(\mathcal{D}, d)$ za vsako odprto $\mathcal{O}' \subset \mathcal{M}'$. Pokažemo, da je f zvezna v vsaki točki $\mathcal{D}$. Naj bo $x_0 \in \mathcal{D}$ in $\mathcal{V}$ odprta okolica točke $y_0 = f(x_0)$. Po predpostavki je $f^{-1}(\mathcal{V})$ odprta množica v $(\mathcal{D}, d)$. Ker vsebuje x_0, je $\mathcal{U} = f^{-1}(\mathcal{V})$ okolica točke x_0. Velja seveda $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Torej za vsako okolico $\mathcal{V}$ točke $y_0 = f(x_0)$, obstaja okolica $\mathcal{U}$ točke x_0 v $(\mathcal{D}, d)$, da je $f(\mathcal{U}) \subset \mathcal{V}$. Torej je f zvezna v x_0. Ker to velja za vsak x_0, je f zvezna na $\mathcal{D}$. $\square$

Izrek 116 *Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je zvezna natanko tedaj, ko je praslika $f^{-1}(\mathcal{Z}')$ vsake zaprte množice $\mathcal{Z}'$ prostora $\mathcal{M}'$, zaprta množica v $(\mathcal{D}, d)$.*

Dokaz: Podobno kot prej (s prehodom na komplemente). $\square$

Opomba: Če je f zvezna, slika odprte množice ni nujno odprta. Kot primer navedimo konstantno funkcijo, ki vsak odprt interval preslika v točko, množico, ki vsebuje eno samo točko in je zaprta. Podobno velja, da slika zaprte množice v splošnem ni zaprta.

Izrek 117 *Zvezna slika kompaktne množice je vedno kompaktna množica.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ kompaktna in $f : \mathcal{K} \to \mathcal{M}'$ zvezna. Naj bo $\mathcal{K}' = f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{M}'$. Dokažimo, da je $\mathcal{K}'$ kompaktna. Naj bo $\{\mathcal{O}_\gamma : \gamma \in \Gamma\}$ poljubno odprto pokritje za $\mathcal{K}' \subset \mathcal{M}'$. Ker so $\mathcal{O}'_\gamma$ odprte in f zvezna, so $f^{-1}(\mathcal{O}'_\gamma)$ odprte v $(\mathcal{K}, d)$. Ker je $\mathcal{K}$ kompaktna v $(\mathcal{M}, d)$, je po znanem izreku kompaktna tudi v $(\mathcal{K}, d)$. Zato je mogoče iz odprtega pokritja $\{f^{-1}(\mathcal{O}'_\gamma) : \gamma \in \Gamma\}$ množice $\mathcal{K}$ izbrati končno podpokritje, tj. $\mathcal{K} \subset \big(f^{-1}(\mathcal{O}'_{\gamma_1}) \cup \ldots \cup f^{-1}(\mathcal{O}'_{\gamma_n})\big)$. Od tod sledi, da je $\mathcal{K}' = f(\mathcal{K}) \subset \big(\mathcal{O}'_{\gamma_1} \cup \ldots \cup \mathcal{O}'_{\gamma_n}\big)$. Torej $\mathcal{K}' = f(\mathcal{K})$ je res kompaktna. $\square$

Posledica 40 *Naj bo realna funkcija definirana in zvezna na kompaktni množici $\mathcal{K}$ metričnega prostora $\mathcal{M}$. Tedaj je f na $\mathcal{K}$ na obe strani omejena in na $\mathcal{K}$ doseže svoj maksimum in svoj minimum.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ kompaktna in $f : \mathcal{K} \to \mathbb{R}$ zvezna. Po izreku je $f(\mathcal{K}) = \{f(x) : x \in \mathcal{K}\}$ kompaktna podmnožica v $\mathbb{R}$. Torej je $f(\mathcal{K})$ omejena in zaprta. Omejenost pomeni, da je $f(\mathcal{K}) \subset \mathcal{K}(a, r)$ za neka $a \in \mathbb{R}$ in $r > 0$, tj. $f(\mathcal{K}) \subset (a - r, a + r)$. Torej je $f(x) < a + r$ za vse $x \in \mathcal{K}$ in $f(x) > a - r$ za vse $x \in \mathcal{K}$, tj. f je navzgor in navzdol omejena.

Naj bo $L = \sup\{f(x) : x \in \mathcal{K}\}$ in $l = \inf\{f(x) : x \in \mathcal{K}\}$. Ker je $f(\mathcal{K})$ zaprta in L njena natančna zgornja meja, je $L \in f(\mathcal{K})$. Denimo, da $L \notin f(\mathcal{K})$. Tedaj so po definiciji sup točke iz $f(\mathcal{K})$ poljubno blizu L. Tedaj je L stekališče množice $f(\mathcal{K})$, ki je zaprta. Zaprta množica pa vsebuje vsa svoja stekališča, torej tudi L. Iz protislovja sledi $L \in f(\mathcal{K})$. Podobno pokažemo za minimum. $\square$

Definicija 123 *Naj bo $\mathcal{D} \subset \mathcal{M}$. Preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je* ***enakomerno zvezna*** *na $\mathcal{D}$, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja $\delta > 0$, da je $d'\big(f(x_1), f(x_2)\big) < \varepsilon$, čim je $d(x_1, x_2) < \delta$ in vsaka $x_1, x_2 \in \mathcal{D}$.*

Enakomerno zvezna preslikava $f : \mathcal{D} \to \mathcal{M}'$ je seveda zvezna. Obratno v splošnem ni res. Poznamo takšne primere iz funkcij, npr. $x \mapsto 1/x$ na $(0, 1)$ ali $x \mapsto \sin 1/x$ na $(0, 1)$. Pri funkcijah pa vemo, da funkcija, ki je zvezna na zaprtem intervalu, je na takšnem intervalu enakomerno zvezna. Posplošitev tega je naslednji izrek.

Izrek 118 *Če je $\mathcal{K} \subset \mathcal{M}$ kompaktna in $f : \mathcal{K} \to \mathcal{M}'$ zvezna, tedaj je f (na $\mathcal{K}$) enakomerno zvezna.*

Dokaz: Naj bo $\mathcal{K}$ kompaktna in $f : \mathcal{K} \to \mathcal{M}'$ zvezna. Naj bo $\varepsilon > 0$. Zaradi zveznosti f obstaja za vsak $x \in \mathcal{K}$ takšen $\delta_x > 0$, da je $d'\big(f(x), f(\tilde{x})\big) < \varepsilon/2$, čim je $d(x, \tilde{x}) < \delta_x$ in $x, \tilde{x} \in \mathcal{K}$. Naj bo $\mathcal{U}_x = \mathcal{K}(x, \delta_x/2)$. Družina $\{\mathcal{U}_x : x \in \mathcal{K}\}$ je odprto pokritje za $\mathcal{K}$. Ker je $\mathcal{K}$ kompaktna, obstaja končno podpokritje $\mathcal{K}(x_1, \delta_{x_1}/2), \ldots, \mathcal{K}(x_n, \delta_{x_n}/2)$. Naj bo $\delta = \min\{\delta_{x_1}/2, \ldots, \delta_{x_n}/2\}$. Naj bo $x, \tilde{x} \in \mathcal{K}$, $d(x, \tilde{x}) < \delta$. Ker naše krogle $\mathcal{K}(x_i, \delta_{x_i}/2)$, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ pokrivajo množico $\mathcal{K}$, je x v eni od njih, npr. $x \in \mathcal{K}(x_k, \delta_{x_k}/2)$. Torej je $d(x, \tilde{x}) < \delta \leq \delta_{x_k}/2$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
d(\tilde{x}, x_k) &\leq d(\tilde{x}, x) + d(x, x_k) \\
&< \frac{\delta_{x_k}}{2} + \frac{\delta_{x_k}}{2} \\
&= \delta_{x_k}.
\end{aligned}
$$

Torej je $d'\big(f(x), f(x_k)\big) \leq \varepsilon/2$. Enako $d'\big(f(\tilde{x}), f(x_k)\big) \leq \varepsilon/2$. Sledi:

$$
\begin{aligned}
d'\big(f(x), f(\tilde{x})\big) &\leq d'\big(f(x), f(x_k)\big) + d'\big(f(x_k), f(\tilde{x})\big) \\
&< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Torej je f res enakomerno zvezna. $\square$

8.6 Banachovo skrčitveno načelo v polnih metričnih prostorih

Definicija 124 *Naj bo $\mathcal{M}$ poljuben metričen prostor. Preslikava $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ je* ***skrčitev (kontrakcija)****, če obstaja takšno pozitivno število $q < 1$, da velja*

$$d\big(f(x), f(y)\big) \leq q d(x, y)$$

za poljubna $x, y \in \mathcal{M}$.

Tu gre za preslikavo s prostora $\mathcal{M}$ nazaj v isti $\mathcal{M}$!

Izrek 119 (Banachovo skrčitveno načelo) *Naj bo $\mathcal{M}$ poln metričen prostor in $f : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$ skrčitev. Tedaj obstaja natanko ena **negibna (fiksna) točka** preslikave f, tj. takšna točka $a \in \mathcal{M}$, da je $f(a) = a$. Če je $x_0 \in \mathcal{M}$ poljubna točka, tedaj zaporedje*

$$x_0, f(x_0), f\big(f(x_0)\big), f\Big(f\big(f(x_0)\big)\Big), \ldots$$

konvergira k a.

Dokaz:

i) Pokažimo, da je negibna točka (če obstaja) ena sama. Recimo, da sta dve. $f(a) = a$ in $f(b) = b$. Tedaj je $d(a, b) = d\big(f(a), f(b)\big) \le qd(a, b)$. Če je $a \neq b$, je $d(a, b) > 0$ in $d(a, b) \le qd(a, b)$ protislovje. Torej $a = b$ oz. negibna točka (če obstaja) je ena sama.

ii) Pokazati moramo še obstoj negibne točke. Naj bo $x_0 \in \mathcal{M}$ poljuben. Naj bo $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), x_3 = f(x_2) \ldots$ Pokažimo, da je to zaporedje Cauchyjevo. Naj bo $d(x_0, x_1) = D$.

$$\begin{aligned} d\big(x_1, x_2\big) &= d\big(f(x_0), f(x_1)\big) \\ &\le qd(x_0, x_1) \end{aligned}$$

Torej $d\big(x_1, f(x_1)\big) \le qD$ oz. $d\big(x_1, x_2\big) \le qD$. Pri tem je po definiciji $q < 1$.

$$\begin{aligned} d\big(x_n, f(x_n)\big) &= d\big(f(x_{n-1}), f(x_n)\big) \\ &\le qd(x_{n-1}, x_n) \end{aligned}$$

Ker je $d(x_0, x_1) = D$ in $d\big(x_1, x_2\big) \le qD$, sledi

$$\begin{aligned} d(x_2, x_3) &\le qd(x_1, x_2) \le q^2 D, \\ d(x_3, x_4) &\le \ldots \le q^3 D, \\ &\ldots \\ d(x_n, x_{n+1}) &\le \ldots \le q^n D, \\ &\ldots \end{aligned}$$

Naj bo $n < m$. Oglejmo si

$$\begin{aligned} d(x_n, x_m) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_{n+2}) + \ldots + d(x_{m-1}, x_m) \\ &\leq q^n D + q^{n+1} D + \ldots + q^{m-1} D \\ &= q^n D(1 + q + q^2 + \ldots + q^{m-1-n}) \\ &\leq q^n D(1 + q + q^2 + \ldots) \\ &= q^n D \frac{1}{1-q} \\ &= \frac{q^n D}{1-q}. \end{aligned}$$

Za vsaka n, m, $n < m$, torej velja $d(x_n, x_m) \leq q^n D/(1-q)$. Od tod zaključimo, da je zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Naj bo $\varepsilon > 0$. Izberimo n_0 tako velik, da je $q^n D/(1-q) < \varepsilon/2$. Naj bosta $n, m \geq n_0$. Ker je $m \geq n_0$, je

$$d(x_m, x_{n_0}) \leq \frac{q^{n_0} D}{1-q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ker je $n \geq n_0$, je

$$d(x_n, x_{n_0}) \leq \frac{q^{n_0} D}{1-q} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sledi, da je

$$\begin{aligned} d(x_m, x_n) &\leq d(x_m, x_{n_0}) + d(x_n, x_{n_0}) \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

To pomeni, da je zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchyjevo. Ker je $\mathcal{M}$ poln, zaporedje $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ konvergira. Označimo limito zaporedja $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ z a, tj. $a = \lim_{n\to\infty} x_n$.

$$\begin{aligned} a &= \lim_{n\to\infty} x_n \\ &= \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} f(x_n) \\ &= f(\lim_{n\to\infty} x_n) \\ &= f(a) \end{aligned}$$

Tako dobljen a je torej res fiksna točka. Od prej pa vemo, da je edina. □

Opomba: Zveznost skrčitve je trivialna: V ε-δ definiciji zveznosti vzamemo $\delta = \varepsilon$. Naj bo $x \in \mathcal{M}$, $\varepsilon > 0$ in $\delta = \varepsilon$. Če je $d(y, x) < \delta$, je tedaj

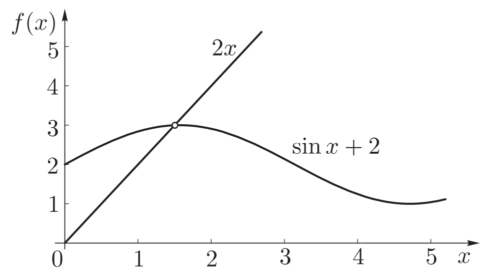
$$\begin{aligned} d\big(f(y), f(x)\big) &\leq q d(y, x) \\ &\leq q\delta \\ &= q\varepsilon \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Torej zveznost f v točki x (x je poljubnen) je res trivialna.

Zgled: Z uporabo Banachovega skrčitvenega načela poiščimo rešitev enačbe

$$2x = \sin x + 2$$

na vsaj tri decimalke natančno.



Slika 8.1: Iskanje ničle z uporabo Banachovega skrčitvenega načela

Pisali bomo

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\sin x + 1, \\ f(x) &= \frac{1}{2}\sin x + 1. \end{aligned}$$

Ocenimo

$$\begin{aligned} d\big(f(x_1), f(x_2)\big) &= |f(x_1) - f(x_2)| \\ &\overset{(*)}{=} |f'(\xi)|\ |x_2 - x_1| \\ &= |\tfrac{1}{2}\cos\xi|\ |x_2 - x_1| \\ &\leq \tfrac{1}{2}|x_2 - x_1| \\ &= \tfrac{1}{2} d(x_1, x_2) \end{aligned}$$

$(*)$ upoštevamo Lagrangeev izrek, tj. $f'(\xi)(x_2 - x_1) = f(x_2) - f(x_1)$. Torej $d\big(f(x_1), f(x_2)\big) \le \frac{1}{2} d(x_1, x_2)$. Naj bo $\mathcal{M} = [-2, 2]$. Funkcija $f : [-2, 2] \to [1/2, 3/2] \subset [-2, 2]$ je torej skrčitev ($q = 1/2$), ki slika poln metričen prostor $\mathcal{M} = [-2, 2]$ vase. Torej lahko uporabimo naš izrek. Enačba $f(x) = \frac{1}{2} \sin x + 1$ je enačba $f(a) = a$. Rešitev te enačbe je ravno negibna točka naše preslikave f. Prvi približek: $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 1/2 \sin x + 1$,... in $d(x_0, x_1) = D$, $d(x_1, x_2) \le qD = 1/2D$, $d(x_2, x_3) \le (1/2)^2 D$,...

Spomnimo se ocene iz dokaza. Ker je $D = 1$, je

$$d(x_n, x_m) \le \left(\frac{1}{2}\right)^n \frac{1}{1-q}, \qquad m \ge n$$

oziroma $|x_n - x_m| \le (1/2)^n \cdot 2$, $m \ge n$. Fiksirajmo n in pošljimo m čez vse meje ($m \to \infty$, potem $x_m \to a$). Sledi $|x_n - a| \le (1/2)^n \cdot 2$. Če je npr. $n = 15$, je rešitev res vsaj na tri decimalke natančna. $\Diamond$

Opomba: Za reševanje takšnih enačb so običajno veliko boljše numerične metode, npr. bisekcijska metoda, tangentna metoda itn.

8.7 Nadaljnji primeri metričnih prostorov

Definicija 125 *Naj bo $\mathcal{X}$ realen ali kompleksen vektorski prostor.* ***Norma*** *na $\mathcal{X}$ je funkcija $\|.\| : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ in izpolnjuje naslednje pogoje*

i) $\|x\| \ge 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{X}$,

ii) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$,

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ *za vsak* $x \in \mathcal{X}$ *in za vsak* $\lambda \in \mathbb{F}$,

iv) $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$ *za vsaka* $x, y \in \mathcal{X}$.

Par $(\mathcal{X}, \|.\|)$ imenujemo ***normiran vektorski prostor***.

Izrek 120 *Če je $\mathcal{X}$ normiran vektorski prostor, je z $d(x, y) = \|x - y\|$ definirana metrika na $\mathcal{X}$.*

Dokaz: Preverimo lastnosti.

- $d(x,y) = \|x-y\| \geq 0$
- $d(x,y) = \|x-y\| = 0 \iff x-y=0 \iff x=y$
- $$\begin{aligned} d(x,y) &= \|x-y\| \\ &= \|(-1)(y-x)\| \\ &= |-1|\ \|y-x\| \\ &= \|y-x\| \\ &= d(y,x) \end{aligned}$$
- $$\begin{aligned} d(x,z) &= \|x-z\| \\ &= \|(x-y)+(y-z)\| \\ &\leq \|x-y\| + \|y-z\| \\ &= d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

$\square$

Zgled: $\mathbb{R}$, $\|x\| = |x|$. $\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^2$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2}$, $x=(x_1,x_2)$. $\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^3$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$, $x=(x_1,x_2,x_3)$. Odprta krogla s središčem v izhodišču in polmerom 1:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}(0,1) &= \{x \in \mathbb{R}^3 : d\big((0,0,0),(x_1,x_2,x_3)\big) < 1\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2} < 1\} \end{aligned}$$

$\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^2$. Definirajmo normo kot $\|x\| = \max\{|x_1|,|x_2|\}$, $x=(x_1,x_2)$.

Preverimo lastnosti norme.

$$\begin{aligned}\|\lambda x\| &= \max\{|\lambda x_1|, |\lambda x_2|\}\\ &= \max\{|\lambda|\ |x_1|, |\lambda|\ |\lambda x_2|\}\\ &= |\lambda| \max\{|x_1|, |x_2|\}\\ &= |\lambda|\ \|x\|\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\|x+y\| &= \|(x_1+x_2), (y_1+y_2)\|\\ &= \max\{|x_1+y_1|, |x_2+y_2|\}\end{aligned}$$

$$\|x\| + \|y\| = \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}$$

$$\begin{aligned}|x_1+y_1| &\le |x_1| + |y_1|\\ &\le \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}\\ |x_2+y_2| &\le |x_2| + |y_2|\\ &\le \max\{|x_1|, |x_2|\} + \max\{|y_1|, |y_2|\}\end{aligned}$$

Velja:

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\|.$$

Odprta krogla s središčem v izhodišču in polmerom 1:

$$\begin{aligned}\mathcal{K}(0,1) &= \{(x_1,x_2) : d\big((x_1,x_2),(0,0)\big) < 1\}\\ &= \{(x_1,x_2) : \|x_1,x_2\| < 1\}\\ &= \{(x_1,x_2) : \max\{|x_1|,|x_2|\} < 1\}\\ &= \{(x_1,x_2) : |x_1| < 1, |x_2| < 1\}.\end{aligned}$$

$\Diamond$

Zgled: $\mathbb{R}^n$, $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2}$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. $\Diamond$

Zgled: $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ je normiran prostor z normo $\|f\| = \max\{|f(x)| : a \le x \le b\}$.

$$\rho(f,g) = \|f-g\| = \max\{|f(x) - g(x)| : a \le x \le b\}$$

$\Diamond$

Definicija 126 *Če je normiran prostor $\mathcal{X}$ v metriki $d(x,y) = \|x-y\|$ poln, se imenuje **Banachov prostor**.*

Opomba: Torej je vsak normiran prostor metričen. Ni pa vsak normiran prostor poln.

Definicija 127 ***Skalarni produkt** na realnem vektorskem prostoru $\mathcal{X}$ je funkcija $\langle .|. \rangle : \mathcal{X} \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, tj. pravilo, ki vsakemu urejenemu paru $(x,y) \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ priredi število $\langle x|y \rangle$, ki mu rečemo skalarni produkt vektorjev x, y, z naslednjimi lastnostmi:*

i) $\langle x|x \rangle \geq 0$ *za vsak* $x \in \mathcal{X}$
$\langle x|x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii) $\langle x|y \rangle = \langle y|x \rangle$ *za vsaka* $x, y \in \mathcal{X}$

iii) $\langle \lambda x|y \rangle = \lambda \langle x|y \rangle$ *za vsaka* $x, y \in \mathcal{X}$ *in vsak* $\lambda \in \mathbb{R}$

iv) $\langle x|y+z \rangle = \langle x|y \rangle + \langle x|z \rangle$
$\langle x+y|z \rangle = \langle x|z \rangle + \langle y|z \rangle$ *za vse* $x, y, z \in \mathcal{X}$.

Opomba: Realen vektorski prostor s skalarnim produktom se imenuje ***realen unitaren prostor***. V realnem unitarnem prostoru velja t.i. ***Cauchy-Schwarzova neenakost***.

$$|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

Dokaz: Za vsako realno število a je

$$\langle x - ay|x - ay \rangle \geq 0,$$

tj.

$$\langle x|x \rangle - 2a\langle x|y \rangle + a^2\langle y|y \rangle \geq 0.$$

Če je $y = 0$, je neenakost očitna. Če $y \neq 0$, pa vstavimo $a = \langle x|y \rangle / \langle y|y \rangle$ in dobimo

$$\langle x|x \rangle \langle y|y \rangle \geq \langle x|y \rangle^2.$$

Kar pomeni $|\langle x|y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$. □

Izrek 121 *Če je $\mathcal{X}$ realen unitaren prostor, je s formulo $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}$ definirana norma na $\mathcal{X}$.*

Dokaz izreka: Edina netrivialna stvar je trikotniška neenačba.

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y|x+y\rangle \\
&= \langle x+y|x\rangle + \langle x+y|y\rangle \\
&\leq \|x\|\,\|x+y\| + \|y\|\,\|x+y\|
\end{aligned}$$

Če je $x + y = 0$ je dokaz očiten. Če $x + y \neq 0$, pa obe strani delimo z $\|x+y\|$ in dobimo $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$. □

Zgled: $\mathbb{R}^2$ je s skalarnim produktom

$$\langle (x_1, x_2)|(y_1, y_2)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2$$

unitaren prostor. ◊

Zgled: $\mathbb{R}^n$ je s skalarnim produktom

$$\langle (x_1, x_2, \ldots, x_n)|(y_1, y_2, \ldots, y_n)\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$$

unitaren prostor. ◊

Opomba: Cauchy-Schwarzova neenakost pomeni:

$$\left|\sum_{i=1}^n x_iy_i\right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}\,\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}.$$

V realnem unitarnem prostoru lahko definiramo kot med vektorjema, tj. elementoma prostora.

$$\cos\alpha = \frac{\langle x|y\rangle}{\|x\|\,\|y\|}$$

Elementa unitarnega prostora imenujemo pravokotna, če je njun skalarni produkt enak 0.

Definicija 128 *Če je realen unitaren prostor v metriki, porojeni s skalarnim produktom $\|x\| = \sqrt{\langle x|x\rangle}, d(x,y) = \|x-y\|$, poln, se imenuje* ***Hilbertov prostor****.*

Opomba: Končnodimenzionalen normiran prostor je vedno poln.

Zgled: Prostor $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ postane realen unitaren prostor, če definiramo skalarni produkt

$$\langle f|g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx.$$

$\diamondsuit$

Opomba: Norma $\|f\| = \sqrt{\int_a^b f(x)^2 dx}$ je seveda drugačna od supnorme.

Opomba: Prostor $\mathcal{C}\big([a,b]\big)$ z metriko, porojeno s skalarnim produktom, ni poln.

Stvarno kazalo

ε-okolica, 15, 35, 61
n-ti koreni enote, 30
n-ti ostanek vrste, 63
številska vrsta, 217
števna množica, 33
števno neskončna množica, 33

absolutna vrednost, 18
absolutna vrednost števila, 19
absolutno konvergentna, 229
aksiomi, 2
algebraična števila, 17
alternirajoča vrsta, 230
analitična funkcija, 260
argument kompleksnega števila, 29
arhimedska lastnost, 14
asociativnost, 3

Banachov prostor, 290
bijektivnost, 32

Cauchy-Schwarzova neenakost, 290
Cauchyjev pogoj, 39, 92, 272
Cauchyjev-integralski kriterij, 228
Cauchyjev-korenski kriterij, 224
Cauchyjeva glavna vrednost, 195
cela števila $\mathbb{Z}$, 1
cikloida, 139
ciklometrične funkcije, 87

D'Alembertov-kvocientni kriterij, 222
Darbouxov integral, 168
Darbouxova vsota, 161
de Moivreova formula, 29
decimalni ulomek, 15
Dedekindov aksiom, 11
definicijsko območje, 31
definicijsko območje, 65
desna limita funkcije, 90
desni odvod, 97
diferenčni kvocient, 95
diferenciabilna funkcija, 109
diferenciabilnost, 109
diferencial, 110
divergentno zaporedje, 36
dolžina poti, 200
določeni integral, 157
določeni integral funkcije, 158, 159
domena, 65

eksplicitno podane krivulje, 136
eksponent, 51
eksponentna funkcija, 84
ekstrem, 118

ekvipolentnost, 33
elipsa, 139
enakomerna konvergenca, 237
enakomerna zveznost, 77, 282
enota, 3
Eulerjeva Γ-funkcija, 199

Fabonaccijevo zaporedje, 34

geometrijska vrsta, 218
gladek lok, 205
gladka funkcija, 99
gladka krivulja, 143, 205
gladka pot, 201
globalni maksimum, 118
globalni minimum, 118
graf funkcije, 67

Hilbertov prostor, 291
hiperbola, 139

identična preslikava, 32
identiteta, 32
imaginarna enota, 23
imaginarni del kompleksnega števila, 24
implicitno podane krivulje, 137
infimum, 9
infimum funkcije, 70
injektivnost, 32
integrabilnost funkcije, 158
integrabilnost po Darbouxu, 163
integracija po delih, 150
interval, 15
inverzna funkcija, 69
inverzna preslikava, 32
inverzna slika, 31
inverzni element, 3
iracionalna števila, 17
izlimitirani integral, 190
izmerljiva pot, 201

kardinalno število, 33
kardioida, 210
kompaktnost, 275
kompleksna števila $\mathbb{C}$, 21
kompozicija, 32
kompozitum, 32
komutativnost, 3
končna množica, 33
končno pokritje, 275
konjugirano kompleksno število, 24
konkavna funkcija, 123
konveksna funkcija, 123
konvergenčni polmer, 244
konvergenca, 237, 272
konvergenca vrste, 217
konvergentna vrsta, 63
konvergentno zaporedje, 36
krivulje v ravnini, 136
krožnica, 138
kvocient v $\mathbb{Q}$, 6

L'Hospitalovi pravili, 129
Lagrangeev izrek, 115
Leibnizeva formula, 178

leva limita funkcije, 90
levi odvod, 97
limita, 36
limita funkcije, 87
logaritemska funkcija, 85
lokalni ekstrem, 118
lokalni maksimum, 120
lokalni minimum, 120
lokalno kompaktni prostori, 278

majoranta, 222
maksimum, 118
meja množice, 265
metričen prostor, 263
minimum, 118
moč množice, 33
monotonost funkcije, 83

naraščajoča funkcija, 83, 117
naravna števila $\mathbb{N}$, 1
naravna parametrizacija, 209
nasprotno število, 3
natančna spodnja meja, 9
natančna zgornja meja, 9
neštevna množica, 33
nedoločeni integral, 147, 149
negibna (fiksna) točka, 284
neodvisna spremenljivka, 65
nepravi integral, 190
ničla funkcije, 71
norma, 287
normala, 145
normiran vektorski prostor, 287
notranjost množice, 265

obseg, 7
odprt krog, 61
odprta krogla, 264
odprta množica, 267
odprto pokritje, 274
odvedljivost, 95
odvod funkcije, 95
odvodi višjega reda, 112
okolica, 265
omejenost, 71, 270
osnova, 51
osnovni izrek int. računa, 178
ostanek vrste, 219

padajoča funkcija, 83, 117
parametrično podane krivulje, 137
parametrski interval, 138
Peanovi aksiomi, 17
pogojno konvergentna vrsta, 232
pokritje, 274
polarni zapis, 29
polnost, 273
popolna indukcija, 18
posplošeni integral, 190
pot, 200
pot v ravnini, 138
potenčna vrsta, 243
potenca, 51
povprečna vrednost funkcije, 181

pozitivnost, 7

praslika, 31

pravilo krajšanja, 3, 6

preslikava, 31

prevoj, 126

primitivna funkcija, 147

Raabejev kriterij, 225

racionalna števila, 2

racionalna števila $\mathbb{Q}$, 2

razširitev funkcije, 66

razdalja, 263

realen unitaren prostor, 290

realna števila $\mathbb{R}$, 11

realna funkcija, 65

realni del kompleksnega števila, 24

recipročno število, 5

regularna parametrizacija, 206

rez, 11

Riemannov integral, 159

Riemannova vsota, 158

rob množice, 265

Rolleov izrek, 115

sedlo, 120

skalarni produkt, 290

skok funkcije, 91

skrčitev (kontrakcija), 283

slika, 31

spodnja meja, 8

stacionarna točka, 118

stekališče, 35, 270

strogo naraščajoča funkcija, 117

strogo padajoča funkcija, 117

supremum, 9

supremum funkcije, 70

surjektivnost, 32

tangenta na krivuljo, 145

Taylorjev polinom, 252

Taylorjeva vrsta, 255

tir (sled) poti, 138

tir poti, 200

transcendentna števila, 17

tranzitivnost, 7

trikotniška neenakost, 19, 263

verižno pravilo, 102

vrednost funkcije f v točki x, 66

vrsta, 63, 217

vsota vrste, 63

zaloga vrednosti, 31, 65

zaporedje, 271

zaporedje delnih vsot, 63

zaporedje delnih (parcialnih) vsot, 217

zaporedje kompleksnih števil, 61

zaporedje realnih števil, 33

zaprta krogla, 264

zaprta množica, 1, 267

zaprto pokritje, 275

zgornja meja, 8

zožitev, 66

zvezna odvedljivost, 99

zveznost, 72, 280