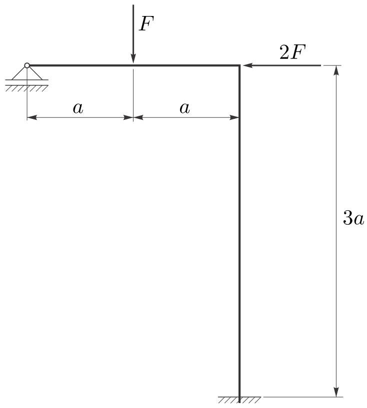
Naloga z vaj. Določi silo v členkasti podpori. Notranjo osno silo N in notranjo strižno silo T zanemari. EI naj bo konstanta.



Slika 1: Konstrukcija.

Najprej preverimo, če je konstrukcija statično nedoločena. Pogoj, da je ravninska konstrukcija statično nedoločena, je

$$2\check{c} + n > 3p + 2v, \tag{1}$$

kjer je $\check{c}$ število členkastih priključkov, n število neznank v podporah, p število palic in nosilcev in v število členkastih vozlišč.

V naši nalogi je tako

$$2 \cdot 1 + 4 > 3 \cdot 1 + 2 \cdot 1, \tag{2}$$

torej

$$6 > 5, \tag{3}$$

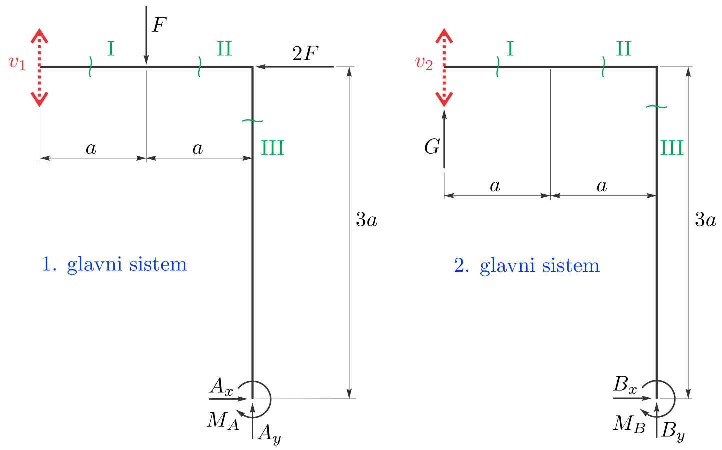
kar pomeni, da je naša konstrukcija $1\times$ statično nedoločena $(6 - 5 = 1)$.

Takšno konstrukcijo razdelimo na dve, ki sta statično določeni (glej sliko 1). Imenujmo levo konstrukcijo 1. glavni sistem, desno konstrukcijo pa 2. glavni sistem.

Vprašanje. Kako tvorimo 1. in 2. glavni sistem?

1. glavni sistem tvorimo tako, da originalni konstrukciji s slike 1 odstranimo (premično) členkasto podporo (iz sistema torej odstranimo eno neznanko), (lahko bi odstranili tudi kaj drugega - glej opombo ob koncu naloge)
2. glavni sistem pa tvorimo (na podlagi 1. glavnega sistema) tako, da na mestu, kjer je v originalni konstrukciji členkasta podpora, dodamo silo G, ki deluje v navpični smeri. Oba, t.j. 1. in 2. glavni sistem sta statično določena.

Rekli bomo, da "v seštevku" predstavljata konstrukcijo s slike 1.



Slika 2: Statično določeni konstrukciji – 1. in 2. glavni sistem

Pomembna opomba. Očitno sta navpična premika v obeh (na novo definiranih) glavnih sistemih *različna* od nič (na sliki 2 sta označena z v_1 oz. v_2). Na originalni konstrukciji, ki je prikazana na sliki 1, pa je seveda navpični premik enak nič, saj je tam podpora. Tako vemo, da mora biti ***vsota*** premikov v_1 in v_2 enaka nič, t.j.

$$v_1 + v_2 = 0. \tag{4}$$

Vprašanje. Kako torej razmišljamo/računamo naprej?

Očitno moramo najprej rešiti dve (pod)nalogi, t.j.

1. izračunati navpični premik v_1 na levi konstrukciji s slike 2
2. izračunati navpični premik v_2 na desni konstrukciji s slike 2.

Opomba. To lahko razumemo kot dve *ločeni* nalogi!

Še enkrat ponovimo, da sta oba, t.j. 1. in 2. glavni sistem, statično določena. Pri reševanju uporabimo metodo virtualnega dela.

Izračun v_1

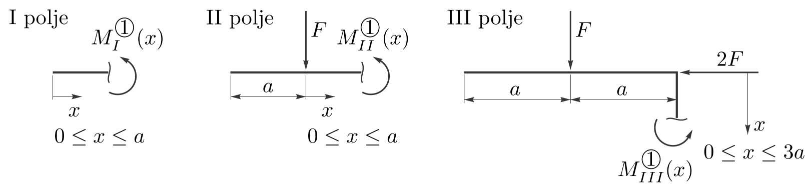
Premik v_1 izračunamo takole:

1. glavni sistem

Najprej v 1. glavnem sistemu (leva konstrukcija na sliki 2)

i) določimo reakcije:
V splošnem bi morali res najprej določiti reakcije, vendar jih v tem primeru ni potrebno, če "režemo" s prostega konca.

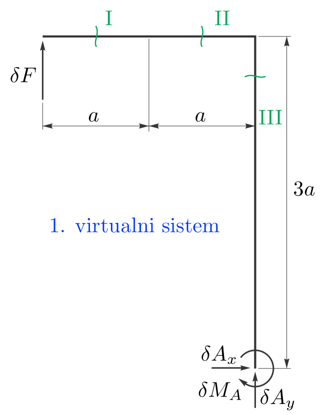
ii) določimo notranji upogibni moment $M(x)$ (za vsako polje posebej):



$$M_I^{①}(x) = 0 \tag{5}$$
$$M_{II}^{①}(x) = -Fx \tag{6}$$
$$M_{III}^{①}(x) = -Fa - 2Fx \tag{7}$$

1. virtualni sistem

Nato k 1. glavnemu sistemu določimo virtaulnega (da lahko izračunamo premik v_1). Tudi ta mora biti statično določen, vendar obremenjen samo z virtualnimi obtežbami.

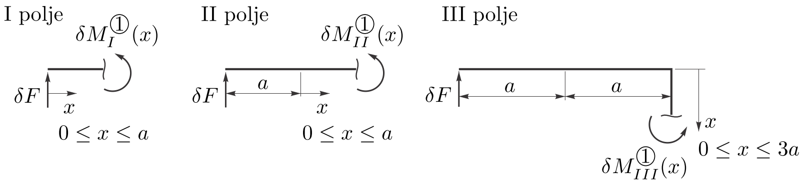


Slika 3: 1. virtualni sistem

Najprej

i) določimo reakcije:
V splošnem bi morali res najprej določiti reakcije, vendar jih v tem primeru ni potrebno, če “režemo” s prostega konca.

ii) določimo virtualni notranji upogibni moment $\delta M(x)$ (za vsako polje posebej):



$$\delta M_I^{\textcircled{1}}(x) = \delta F x \tag{8}$$
$$\delta M_{II}^{\textcircled{1}}(x) = \delta F a + \delta F x \tag{9}$$
$$\delta M_{III}^{\textcircled{1}}(x) = 2\delta F a \tag{10}$$

Uporabimo princip virtualnega dela

Kot smo že omenili zgoraj bomo za določitev v_1 uporabili princip virtualnega dela. Ta pravi, da je virtualno delo zunanjih sil (in momentov) enako virtualnemu delu notranjih sil (in momentov), torej

$$\delta W_N^{\textcircled{1}} = \delta W_Z^{\textcircled{1}}, \tag{11}$$

pri čemer je

$$\begin{aligned}
\delta W_N^{\textcircled{1}} &= \int_0^a \frac{M_I^{\textcircled{1}}(x)\delta M_I^{\textcircled{1}}(x)}{EI} dx + \int_0^a \frac{M_{II}^{\textcircled{1}}(x)\delta M_{II}^{\textcircled{1}}(x)}{EI} dx + \\
&\quad + \int_0^{3a} \frac{M_{III}^{\textcircled{1}}(x)\delta M_{III}^{\textcircled{1}}(x)}{EI} dx \\
&= \int_0^a \frac{0 \cdot (\delta F x)}{EI} dx + \int_0^a \frac{(-Fx)(\delta F a + \delta F x)}{EI} dx + \\
&\quad + \int_0^{3a} \frac{(-Fa - 2Fx)(2\delta F a)}{EI} dx \\
&= ... \\
&= -\frac{149 F \delta F a^3}{6EI}
\end{aligned} \tag{12}$$

in

$$\delta W_Z^{\textcircled{1}} = \delta F v_1. \tag{13}$$

Iz en. (11), (12) in (13) nato sledi

$$-\frac{149F\delta Fa^3}{6EI} = \delta F v_1 \quad \Rightarrow \quad v_1 = -\frac{149Fa^3}{6EI}. \tag{14}$$

Izračun v_2

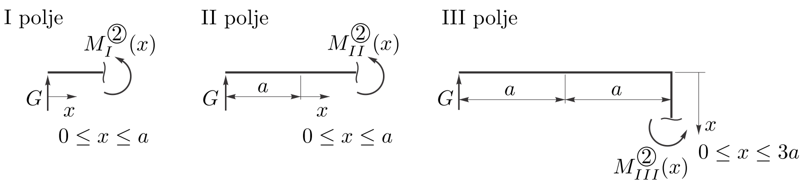
Premik v_2 izračunamo takole:

2. glavni sistem

Najprej

i) določimo reakcije:
V splošnem bi morali res najprej določiti reakcije, vendar jih v tem primeru ni potrebno, če "režemo" s prostega konca.

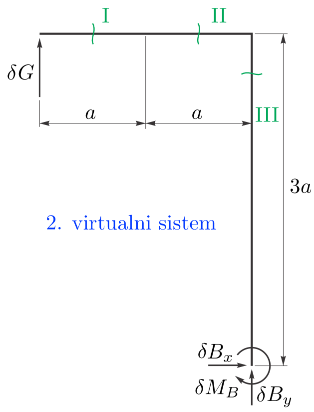
ii) določimo notranji upogibni moment $M(x)$ (za vsako polje posebej):



$$M_I^{②}(x) = Gx \tag{15}$$
$$M_{II}^{②}(x) = Ga + Gx \tag{16}$$
$$M_{III}^{②}(x) = 2Ga \tag{17}$$

2. virtualni sistem

Nato k 2. glavnemu sistemu določimo virtaulnega (da lahko izračunamo premik v_2). Tudi ta mora biti statično določen, vendar obremenjen samo z virtualnimi obtežbami.

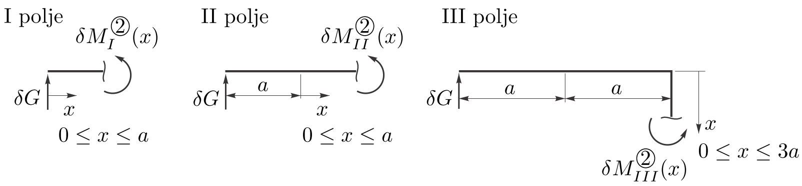


Slika 4: 2. virtualni sistem

Najprej

i) določimo reakcije:
V splošnem bi morali res najprej določiti reakcije, vendar jih v tem primeru ni potrebno, če “režemo” s prostega konca.

ii) določimo virtualni notranji upogibni moment $\delta M(x)$ (za vsako polje posebej):



$$\delta M_I^{(2)}(x) = \delta G x \tag{18}$$

$$\delta M_{II}^{(2)}(x) = \delta G a + \delta G x \tag{19}$$

$$\delta M_{III}^{(2)}(x) = 2\delta G a \tag{20}$$

Uporabimo princip virtualnega dela

Za določitev v_2 bomo, kot prej, uporabili metodo virtualnega dela, torej

$$\delta W_N^{(2)} = \delta W_Z^{(2)}, \tag{21}$$

pri čemer je sedaj

$$\begin{aligned}
\delta W_N^{(2)} &= \int_0^a \frac{M_I^{(2)}(x)\delta M_I^{(2)}(x)}{EI}dx + \int_0^a \frac{M_{II}^{(2)}(x)\delta M_{II}^{(2)}(x)}{EI}dx + \\
&+ \int_0^{3a} \frac{M_{III}^{(2)}(x)\delta M_{III}^{(2)}(x)}{EI}dx \\
&= \int_0^a \frac{(Gx)(\delta Gx)}{EI}dx + \int_0^a \frac{(Ga+Gx)(\delta Ga + \delta Gx)}{EI}dx + \\
&+ \int_0^{3a} \frac{(2Ga)(2\delta Ga)}{EI}dx \\
&= \ldots \\
&= \frac{44G\delta Ga^3}{6EI}
\end{aligned} \tag{22}$$

in

$$\delta W_Z^{(2)} = \delta G v_2. \tag{23}$$

Iz en. (21), (22) in (23) nato sledi

$$\frac{44G\delta Ga^3}{3EI} = \delta G v_2 \quad \Rightarrow \quad v_2 = \frac{44Ga^3}{3EI}. \tag{24}$$

Določitev neznane reakcije v podpori

Izračunali smo oba premika v_1 in v_2 v obeh glavnih sistemih. Sedaj pa s pomočjo izraza (4) določimo silo v členkasti podpori (to je bila naloga),

$$-\frac{149Fa^3}{6EI} + \frac{44Ga^3}{3EI} = 0, \tag{25}$$

od koder sledi

$$G = \frac{149}{88}F. \tag{26}$$

Opazimo, da rezultat ne vsebuje nobene od obeh virtualnih sil (δF in δG) (ker se obe okrajšata v enačbah (14) in (24)). Ostane nam samo sila G, katere velikost (in smer) ustreza sili v členkasti podpori na slikah 2-4.

Opomba. Nalogo bi lahko reševali tudi tako, da bi konstrukciji s slike 1 odstranili moment v spodnji podpori. Tako bi reševali na obeh krajiščih členkasto podprto (statično določeno) konstrukcijo. Iskanju reakcij se takrat ne bi mogli ogniti. ***To lahko naredite za vajo.*** Rezulat mora biti enak!

Komentar.

Če si zgornjo nalogo podrobno ogledamo, opazimo, da so statični izračuni identični za 2. glavni sistem, 1. virtualni sistem in 2. virtualni sistem. Spremenijo se samo oznake. To dejstvo precej poenostavi zgornji postopek. Nekoliko ga preoblikujemo (spremenimo samo oznake):

1. korak Določimo glavni sistem (enak, kot zgornji 1. glavni sistem)

2. korak Določimo virtualni sistem (enak, kot zgornji 1. virtualni sistem)

3. korak Za izračun u_G (prej smo ta premik označili z v_1) uporabimo metodo virtualnega dela, torej

$$\delta W_N^G = \delta W_Z^G, \tag{27}$$

$$\delta W_N^G = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{M_i \delta M_i}{EI} dx, \tag{28}$$

$$\delta W_Z^G = \delta F \; u_G, \tag{29}$$

Torej enako, kot v zgornji nalogi.

4. korak V tem koraku pa izračunamo u_V (prej smo ta premik označili z v_2) tako, da upoštevamo, da so statični izračuni v 1. virtualnem sistemu enaki izračunom v 2. glavnem in 2. virtualnem sistemu. Ni nam potrebno risati niti skic niti računati ravnovesij sil in momentov na izrezanih delih. Samo zapišemo in rešimo enačbe

$$\delta W_N^V = \delta W_Z^V, \tag{30}$$

$$\delta W_N^V = \sum_i \int_0^{L_i} \frac{(\delta M_i)^2}{EI} dx, \tag{31}$$

$$\delta W_Z^V = \delta F \; u_V. \tag{32}$$

5. korak Iz pogoja, da mora biti navpični premik v členkasti podpori enak nič

$$u_G + u_V = 0$$

izračunamo δF, ki predstavlja realno silo v podpori.

Za vajo poskusite rešiti nalogo še s pomočjo tega postopka. Pravzaprav bi skoraj morali, saj bomo do konca vaj uporabljali ravno ta (skrajšan) postopek.