

Preskok sistema

Miha Brojan

miha.brojan@fs.uni-lj.si

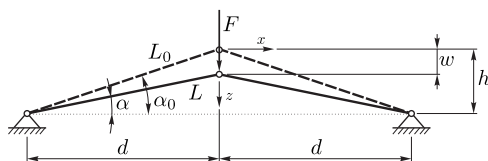
6. marec 2012

1 Uvod

Preskok sistema se lahko pojavi npr. v primeru plitvih ločnih konstrukcij, plitvih lupin ali na ustreznem sistemu palic. Če vzamemo za primer sistem palic (kot na sliki 1), se bosta pod vplivom sile obe palici stisnili, členek pa se bo premaknil v smeri delovanja sile. V odvisnosti od velikosti obremenitve, geometrije sistema in gradiva palic lahko pride do tega, da se bo prijemališče sile sunkovito prestavilo pod zveznico obeh podpor. Rekli bomo, da je takrat sistem *preskočil*. Ta pojav sunkovitega preskoka se v praksi izkorišča v primeru številnih mehanizmov, predvsem stikal različnih izvedb.

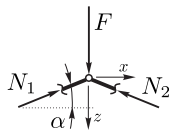
1.1 Določitev zveze med silo F in premikom w

Sistem na sliki 1 je geometrijsko, snovno in obremenitveno simetričen glede na z -os. Gradivo palic je homogeno in izotropno, dimanzija palic pa takšna, da ni nevarnosti njunega uklona. Začetna dolžina palic L_0 in višina h naj bosta znani. S pomočjo Pitagorovega izreka in kotnih funkcij lahko izračunamo dolžino d in velikost kota α_0 . Pod vplivom sile F se bosta obe palici stisnili, členek pa se bo premaknil za premik w . V območju neke vrednosti sile F pa bo sistem *preskočil*, kar pomeni, da se bo pod vplivom poljubno majhne motnje, premik w sunkovito povečal.



Slika 1: Sistem palic, ki je obremenjen s silo F .

Za opis zveze med silo F in premikom w bomo v skladu z teorijo II reda ravnotežne enačbe zapisali na deformiranem sistemu.



Slika 2: Ravnotežje na deformiranem sistemu.

Ravnotežne enačbe za obravnavan primer zapišemo s pomočjo slike 2.

$$\sum_i F_{x,i} = 0 : \quad N_1 \cos \alpha - N_2 \cos \alpha = 0, \quad (1)$$

$$\sum_i F_{z,i} = 0 : \quad -N_1 \sin \alpha - N_2 \sin \alpha + F = 0. \quad (2)$$

Za ravnotežje na deformiranem sistemu torej velja

$$N_1 = N_2 = N \quad (3)$$

in

$$F = 2N \sin \alpha. \quad (4)$$

Dolžino palice v deformiranem stanju bomo označili z L , kot med palico in zveznico med podporama pa z α . Iz geometrije na sliki 1 sledi še

$$\sin \alpha = \frac{h-w}{L}, \quad L^2 = (h-w)^2 + d^2, \quad d^2 = L_0^2 - h^2 \quad (5)$$

in od tod

$$L = \sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}, \quad (6)$$

$$\sin \alpha = \frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}}. \quad (7)$$

Silo F , en. (4), lahko sedaj izrazimo takole

$$F = 2N \frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}}. \quad (8)$$

Oсно silo v palici izrazimo s pomočjo napetosti in Hookeovega zakona,

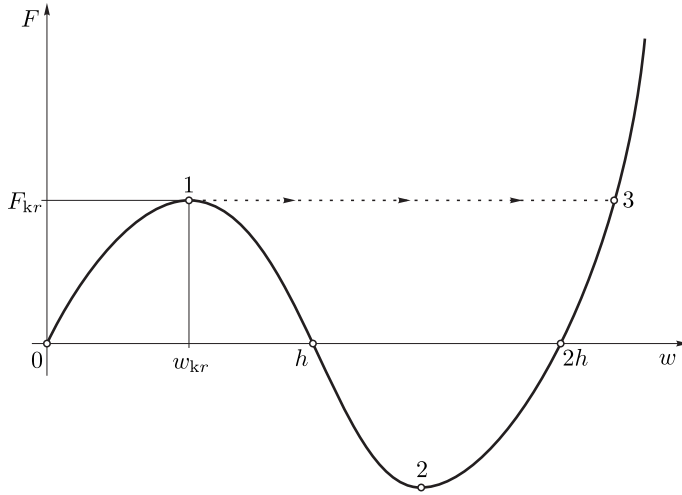
$$N = \sigma A = E \varepsilon A = \frac{\Delta L}{L_0} EA = \frac{L_0 - L}{L_0} EA, \quad (9)$$

pri čemer smo z A označili presek palice, E pa je elastični modul gradiva.

Iz enakosti (8), (9) in (6) sledi

$$\begin{aligned}
 F(w) &= 2N \frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} \\
 &= 2 \frac{L_0 - L}{L_0} EA \frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} \\
 &= 2 \frac{L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}}{L_0} EA \frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} \\
 &= \frac{2EA}{L_0} (h-w) \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} - 1 \right). \tag{10}
 \end{aligned}$$

Diagram na sliki 3 prikazuje silo F v odvisnosti od premika w členka, en. (10). V področju od točke 0 do točke 1 imamo stabilno ravnotežje. Območje 1-2 je nestabilno, saj premik w narašča, čeprav se sila zmanjšuje in postane celo negativna. Od točke 2-3 in naprej imamo zopet stabilno ravnotežje, saj je za povečanje premika potrebno povečanje sile.



Slika 3: Karakteristična krivulja, ki prikazuje silo F v odvisnosti od premika w členka.

Za nas je posebej zanimiva točka 1. V tej točki namreč že (poljubno) majhno povečanje sile povzroči preskok sistema (preskok iz točke 1 v točko 3). V točki 1 definiramo kritično velikost sile in jo označimo z F_{kr} .

V praksi nam sistem preskoči pri konstatni sili $F_1 = F_{kr}$. Zato bo proces potekal po krivulji 0-1-3. V točki 3 sta obe palici obremenjeni na nateg.

1.2 Določitev kritične sile F_{kr}

Poiščimo še velikost kritične sile F_{kr} . Za lažje iskanje ekstrema nekoliko preoblikujmo izraz (10) in zapišemo silo F kot funkcijo kota α .

$$\begin{aligned} F(w) &= \frac{2EA}{L_0}(h-w) \left(\frac{L_0}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} - 1 \right) \\ &= 2EA \left(\frac{h-w}{\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}} - \frac{h-w}{L_0} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

Če upoštevamo en. (7), zadnji člen v oklepaju zgoraj pa zapišemo takole

$$\frac{h-w}{L_0} = \frac{h-w}{d} \frac{d}{L_0} = \frac{d}{L_0} \tan \alpha, \quad (12)$$

dobimo iz (11)

$$F(\alpha) = 2EA \left(\sin \alpha - \frac{d}{L_0} \tan \alpha \right). \quad (13)$$

Iz matematike vemo, da je potreben pogoj za lokalni ekstrem $dF/d\alpha(\alpha_*) = 0$. Torej

$$\begin{aligned} \frac{dF}{d\alpha}(\alpha_*) &= \frac{d}{d\alpha} \left[2EA \left(\sin \alpha - \frac{d}{L_0} \tan \alpha \right) \right]_{\alpha=\alpha_*} \\ &= 2EA \left(\cos \alpha_* - \frac{d}{L_0} \frac{1}{\cos^2 \alpha_*} \right) = 0, \end{aligned}$$

od koder sledi

$$\cos \alpha_* - \frac{d}{L_0} \frac{1}{\cos^2 \alpha_*} = 0. \quad (14)$$

oziroma

$$\cos \alpha_* = \sqrt[3]{\frac{d}{L_0}}. \quad (15)$$

Iz en. (15) in $\sin^2 \alpha_* + \cos^2 \alpha_* = 1$ sledi

$$\sin \alpha_* = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{d}{L_0} \right)^{2/3}} \quad (16)$$

in naprej

$$\tan \alpha_* = \pm \frac{\sqrt{1 - (d/L_0)^{2/3}}}{(d/L_0)^{1/3}}. \quad (17)$$

V skladu z zgornjimi izračuni (prav tako je to jasno s slike 3) bo imela sila F lokalni ekstrem v dveh točkah. V točki 1

$$\begin{aligned}
 F_{\text{kr},1} &= 2EA \left(\sin \alpha_* - \frac{d}{L_0} \tan \alpha_* \right) \\
 &= 2EA \left(\sqrt{1 - \left(\frac{d}{L_0} \right)^{2/3}} - \frac{d}{L_0} \frac{\sqrt{1 - (d/L_0)^{2/3}}}{(d/L_0)^{1/3}} \right) \\
 &= 2EA \left(1 - \left(\frac{d}{L_0} \right)^{2/3} \right)^{3/2}, \tag{18}
 \end{aligned}$$

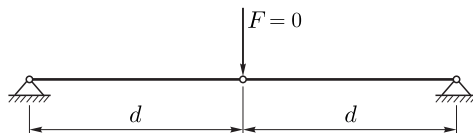
V točki 2 pa

$$F_{\text{kr},2} = -2EA \left(1 - \left(\frac{d}{L_0} \right)^{2/3} \right)^{3/2}. \tag{19}$$

1.3 Določitev največje tlačne sile v palici

Določimo še izraz za določitev največje tlačne sile, ki se pojavi v palici.

Očitno se največja tlačna sila oziroma tlačna napetost pojavi takrat, ko je (tlačna) deformacija največja, t.j., ko velja $w = h$ oziroma $\alpha = 0$ (glej sliko 1 oz. 4).



Slika 4: Slika sistema v trenutku največje sile v palici.

Največjo tlačno silo v palici dobimo torej neposredno iz izraza (9), če L nadomestimo z d , t.j. najmanjšo dolžino palice med procesom deformacije,

$$N_{\text{max}} = EA \frac{L_0 - d}{L_0} = EA \left(1 - \frac{d}{L_0} \right). \tag{20}$$

Da bomo dobili občutek kako plitev mora biti obravnavani sistem palic si pogledjmo koliko mora biti razmerje d/L_0 tako, da σ_{max} ne preseže σ_{D} (zdržati mora 10^6 preklpov). Največja tlačna napetost v palici je

$$\sigma_{\text{max}} = \frac{N_{\text{max}}}{A} = E \left(1 - \frac{d}{L_0} \right) \leq \sigma_{\text{D}}. \tag{21}$$

In od tod

$$\frac{d}{L_0} \geq \frac{E - \sigma_D}{E}. \quad (22)$$

Za praktičen izračun vzemimo $E = 2,1 \cdot 10^5 \text{ N/mm}^2$ in $\sigma_D = 105 \text{ N/mm}^2$. Od sledi

$$\frac{d}{L_0} \geq 0,9995.$$

1.4 Kritična sila po teoriji I reda

Formulo za izračun kritične sile (18) pri preskoku sistema dveh palic, kot ga prikazuje slika 1, smo določili na podlagi statičnega ravnotežja na deformiranem sistemu. Če nekoliko preoblikujemo izraz (6),

$$\begin{aligned} L &= \sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}, \\ \underbrace{L_0 - L}_{\Delta L} &= L_0 - \sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}, \\ \Delta L - L_0 &= -\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}, \\ (\Delta L - L_0)^2 &= \left(-\sqrt{L_0^2 - 2hw + w^2}\right)^2, \\ (\Delta L)^2 - 2\Delta LL_0 + L_0^2 &= L_0^2 - 2hw + w^2 \end{aligned}$$

in zanemarimo kvadratne člene premika in spremembe dolžine, ki so v primerjavi z dolžino palic majhne, dobimo

$$-2\Delta LL_0 = -2hw$$

in od tod

$$\Delta L = \frac{hw}{L_0}. \quad (23)$$

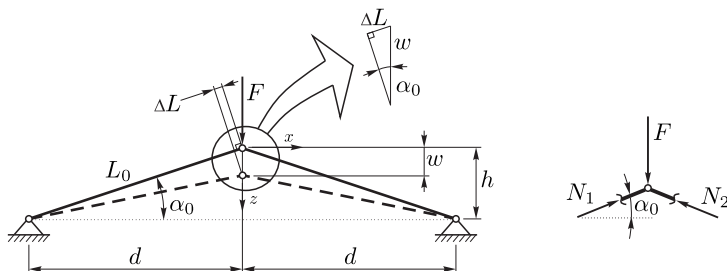
Od tod in izraza (8), v katerem upoštevamo $w = 0$, ter iz (23), (9) sledi

$$F(w) = \frac{2EAh^2}{L_0^3}w. \quad (24)$$

Opomba. Predpostavili smo, da so premiki majhni. V števcu izraza (8) smo zato zanemarili w , ki je v primerjavi s h majhen. Prav tako smo zanemarili tudi zadnja dva člena v imenovalcu, ki sta majhna v primerjavi z L_0^2 .

Poleg tega je predpostavka $w = 0$ v izrazu (8) skladna s teorijo I reda, ki obravnava ravnotežje na nedeformiranem sistemu, torej takrat, ko se premiki enaki 0.

En. (24) sedaj primerjajmo s formulo, ki jo dobimo neposredno iz teorije I reda. V skladu s teorijo I reda zapišemo ravnotežne enačbe na nedeformiranem sistemu, slika 5.



Slika 5: Ravnotežje na nedeformiranem sistemu.

Od tod sledi

$$F = 2N \sin \alpha_0 = 2N \frac{h}{L_0}.$$

Oсна sila v palici je

$$N = \frac{\Delta L}{L_0} EA.$$

Iz geometrije na sliki sledi še

$$\Delta L = w \sin \alpha_0 = w \frac{h}{L_0}.$$

Oсна sila je tako

$$N = \frac{hw}{L_0^2} EA,$$

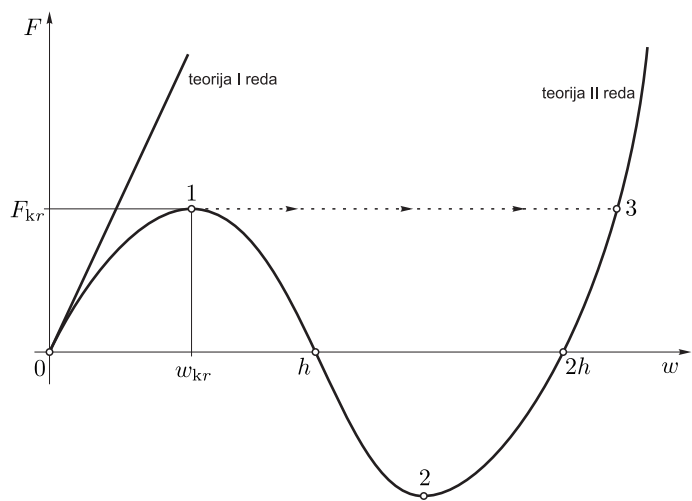
sila F pa

$$F(w) = \frac{2EAh^2}{L_0^3} w. \quad (25)$$

Izraza (24) in (25) sta torej enaka.

Kot lahko opazimo, je rezultat upoštevanja predpostavk teorije I reda linearna zveza med silo F in premikom w .

Na sliki 6 sta narisani premica, ki je podana z izrazom (25) in je določena s pomočjo teorije I reda ter krivulja, ki je podana z izrazom (10) in je določena s pomočjo teorije II reda. Premica je v točki 1 tangenta na krivuljo.



Slika 6: Karakteristični krivulji po teoriji I in II reda.