Naloga. Določi glavne napetosti za napetostno stanje, ki je podano s tenzorjem $\boldsymbol{\sigma}$. V bazi $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ mu pripada matrika

$$(\sigma_{ij})_{\{\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3\}} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

Rešitev. Najti moramo lastne vrednosti in lastne vektorje matrike (σ_{ij}). To naredimo s pomočjo t.i. karakteristične enačbe,

$$(\sigma_{ik} - \lambda\delta_{ik})n_i = 0.$$

V matrični obliki izgleda zgornji zapis takole:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{11}-\lambda & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22}-\lambda & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33}-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0,$$

za dano matriko pa takole:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & 5-\lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} = 0. \tag{1}$$

Zgornji sistem enačb je linearen in homogen. Netrivialno rešitev tega sistema dobimo iz pogoja

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 2 & 1-\lambda & 4 \\ 1 & 4 & 5-\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Od tod sledi:

$$(\lambda-8)(\lambda-1)(\lambda+2) = 0$$

oziroma tri lastne vrednosti, ki ustrezajo velikosti glavnih napetosti. Po definiciji jih uredimo po velikosti:

$$\sigma_1 = 8 \text{ MPa} \quad \sigma_2 = 1 \text{ MPa} \quad \sigma_3 = -2 \text{ MPa}.$$

Lastne vektorje pa poiščemo s pomočjo En. (1). Prvi lastni vektor $\boldsymbol{n}^1$, $(\boldsymbol{n}^1) = (n_1^1, n_2^1, n_3^1)^T$, dobimo tako, da namesto lambde vstavimo $\sigma_1 = 8$,

$$\begin{pmatrix} 1-8 & 2 & 1 \\ 2 & 1-8 & 4 \\ 1 & 4 & 5-8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_1^1 \\ n_2^1 \\ n_3^1 \end{pmatrix} = 0.$$

Zgornji sistem lahko rešimo npr. s pomočjo Gaussove eliminacije. Za prvi lastni vektor (ki ga normiramo) dobimo

$$(\boldsymbol{n}^1) = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Podobno določimo še preostala lastna vektorja

$$(\boldsymbol{n}^2) = \frac{1}{\sqrt{21}} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{in} \quad (\boldsymbol{n}^3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(S skalarnim produktom) lahko preverimo, da so vektorji ortogonalni in ker smo jih normirali tvorijo ortonormirano bazo

$$\{\boldsymbol{n}^1, \boldsymbol{n}^2, \boldsymbol{n}^3\}.$$

V tej bazi ima tenzor $\boldsymbol{\sigma}$ matriko

$$(\sigma_{ij})_{\{\boldsymbol{n}^1,\boldsymbol{n}^2,\boldsymbol{n}^3\}} = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \text{ MPa.}$$

Opomba. Na ravninah, ki jih določajo vektorji $\boldsymbol{n}^1$, $\boldsymbol{n}^2$ in $\boldsymbol{n}^3$ najdemo normalne napetosti z velikostjo 8 MPa, 1 MPa in -2 MPa. Na the ravninah so strižne napetosti enake 0.