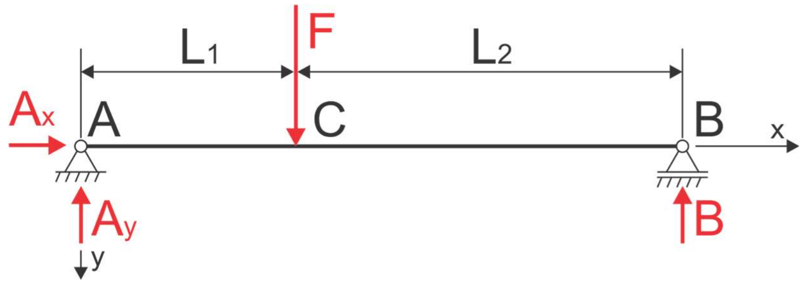
2. Naloga z vaj



Na zgornji sliki je narisan koordinatni sistem, ki je uporabljen za izračun reakcij. Ta ni nujno enak kot koordinatni sistem v katerem zapišemo enačbo notranjega upogibnega momenta. Tukaj imamo dve polji, imeli bomo torej dve upogibnici, eno za prvo polje in eno za drugo polje. Enačba upogibnice velja le v polju, za katero je izpeljana (iz enačbe notranjega upogibnega momenta v tem istem polju).

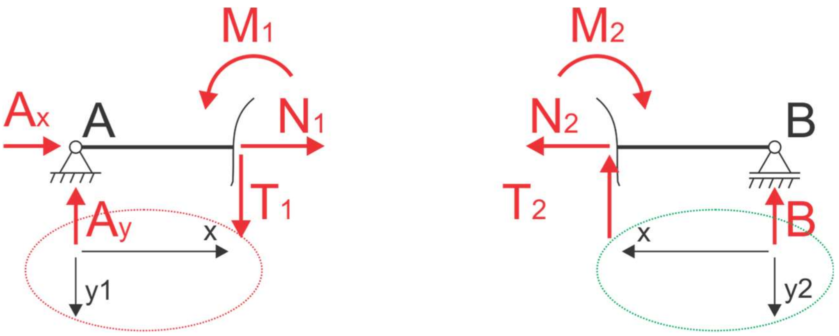
Ravnovesne enačbe:

$$\sum F_{ix} = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0 \quad \Rightarrow \quad -A_y - B + F = 0 \quad \Rightarrow \quad A_y = F - B = F\frac{L_2}{L}$$

$$\sum M_{iz,A} = 0 \quad \Rightarrow \quad FL_1 - BL = 0 \quad \Rightarrow \quad B = F\frac{L_1}{L}$$

Izračunamo notranji upogibni momenti v prvem in drugem polju v izbranih koordinatnih sistemih:



Enačba notranjega upogibnega momenta v prvem polju je izpeljana v koordinatnem sistemu (y_1, x) – obkroženo z rdečo barvo, zato bo tudi enačba upogibnice za to polje podana v tem koordinatnem sistemu. Podobno je enačba notranjega upogibnega momenta v drugem polju izpeljana v koordinatnem sistemu (y_2, x) – obkroženo z zeleno barvo, zato bo enačba upogibnice za drugo polje podana v koordinatnem sistemu (y_2, x).

I. Polje:

$$M = F\frac{L_2}{L}x$$

$$0 \le x \le L_1$$

2. Polje:

$$M = F\frac{L_1}{L}x$$

$$0 \le x \le L_2$$

Upogibnico v prvem in drugem polju dobimo z integriranjem:

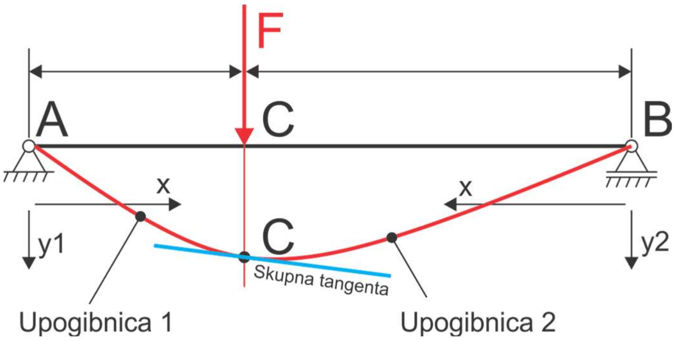
$$y_1''(x) = -\frac{FL_2 x}{LEI_z}$$

$$y_1'(x) = -\frac{FL_2 x^2}{2LEI_z} + C_1$$

$$y_2''(x) = -\frac{FL_1 x}{LEI_z}$$

$$y_2'(x) = -\frac{FL_1 x^2}{2LEI_z} + C_3$$

$$y_1(x) = -\frac{FL_2x^3}{6LEI_z} + C_1x + C_2 \qquad\qquad y_2(x) = -\frac{FL_1x^3}{6LEI_z} + C_3x + C_4$$



Za izračun konstant moramo uporabiti robne pogoje:

1) Ker je nosilec vpet v točki A, bo tu poves enak 0. Točka A sodi v prvo polje, kar pomeni, da bo vrednost enačbe upogibnice prvega polja v tej točki enaka 0. X-koordinata točke A v koordinatnem sistemu prve upogibnice (y_1, x) je 0, zaradi česar velja:

1. $y_1(0) = 0$

$$y_1(0) = -\frac{FL_2 0^3}{6LEI_z} + C_1 0 + C_2 = 0 \quad \rightarrow \quad C_2 = 0$$

2) Ker je nosilec vpet v točki B, bo tudi tu poves enak 0. Točka B sodi v drugo polje, kar pomeni, da bo vrednost enačbe upogibnice drugega polja v tej točki enaka 0. X-koordinata točke B v koordinatnem sistemu druge upogibnice (y_2, x) je 0, zaradi česar velja:

2. $y_2(0) = 0$

$$y_2(0) = -\frac{FL_1 0^3}{6LEI_z} + C_3 0 + C_4 = 0 \quad \rightarrow \quad C_4 = 0$$

3) Nosilec se v točki C ne sme pretrgati. Vrednost povesa v tej točki mora biti enaka za obe upogibnici (upoštevati moramo, da ima točka C v koordinatnih sistemih obeh upogibnic različno vrednost koordinate x – v koordinatnem sistemi prve upogibnice (y_1, x) se nahaja pri L_1, v koordinatnem sistemu druge upogibnice (y_2, x) pa pri L_2).

3. $y_1(L_1) = y_2(L_2)$

$$-\frac{FL_2L_1^3}{6LEI_z} + C_1L_1 = -\frac{FL_1L_2^3}{6LEI_z} + C_3L_2$$

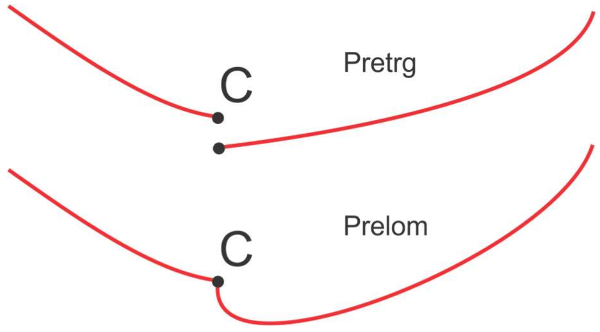
4) Nosilec se v točki C ne sme prelomiti - upogibnici morata imeti v točki C skupno tangento. Prvi odvod funkcije upogibnice nam poda naklonski kot tangente. Upoštevati moramo, da bo naklonski kot skupne tangente v enem od kordinatnih sistemov obeh upogibnic pozitiven, v drugem pa negativen (zaradi različne usmerjenosti osi x v teh dveh koordinatnih sistemih). Ni potrebno, da vemo v katerem koordinatnem sistemu bo pozitiven in v katerem negativen, pomembno je le, da upoštevamo, da je obratnega predzanaka:

4. $y_1'(L_1) = -y_2'(L_2)$

ali

$$-y_1'(L_1) = y_2'(L_2)$$

$$-\frac{FL_2L_1^2}{2LEI_z} + C_1 = \frac{FL_1L_2^2}{2LEI_z} - C_3$$



Iz enačb 3 in 4 sedaj izračunamo C_1 in C_3. Iz enačbe 4 npr. izpostavimo C_1:

$$C_1 = \frac{FL_1L_2^2}{2LEI_z} + \frac{FL_2L_1^2}{2LEI_z} - C_3$$

$$C_1 = \frac{FL_1L_2}{2LEI_z}(L_2 + L_1) - C_3 = \frac{FL_1L_2L}{2LEI_z} - C_3 = \frac{FL_1L_2}{2EI_z} - C_3$$

Rezultat vstavimo v enačbo 3:

$$-\frac{FL_2L_1^3}{6LEI_z} + C_1L_1 = -\frac{FL_1L_2^3}{6LEI_z} + C_3L_2$$

$$-\frac{FL_2L_1^3}{6LEI_z} + \left(\frac{FL_1L_2}{2EI_z} - C_3\right)L_1 = -\frac{FL_1L_2^3}{6LEI_z} + C_3L_2$$

$$-\frac{FL_2L_1^3}{6LEI_z} + \frac{FL_1^2L_2}{2EI_z} = -\frac{FL_1L_2^3}{6LEI_z} + C_3L_2 + C_3L_1$$

$$C_3(L_1 + L_2) = -\frac{FL_2L_1^3}{6LEI_z} + \frac{FL_1^2L_2}{2EI_z} + \frac{FL_1L_2^3}{6LEI_z} = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}\left(-L_1^2 + 3L_1(L_1 + L_2) + L_2^2\right)$$

$$C_3(L_1 + L_2) = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}\left(3L_1(L_1 + L_2) + L_2^2 - L_1^2\right)$$

$$C_3(L_1 + L_2) = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}\left(3L_1(L_1 + L_2) + (L_2 - L_1)(L_2 + L_1)\right)$$

$$C_3 = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}\left(3L_1 + (L_2 - L_1)\right) = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}(2L_1 + L_2)$$

Zadnji rezultat vstavimo nazaj v zgornjo enačbo in izračunamo še C_1:

$$C_1 = \frac{FL_1L_2}{2EI_z} - C_3 = \frac{FL_1L_2}{6LEI_z}(L_1 + 2L_2)$$

Končni enačbi upogibnice:

$$y_1(x) = -\frac{FL_2x^3}{6LEI_z} + \frac{FL_1L_2(L_1 + 2L_2)x}{6LEI_z} = \frac{FL_2}{6LEI_z}\left(-x^3 + L_1(L_1 + 2L_2)x\right)$$

$$y_2(x) = -\frac{FL_1x^3}{6LEI_z} + \frac{FL_1L_2(2L_1 + L_2)x}{6LEI_z} = \frac{FL_1}{6LEI_z}\left(-x^3 + L_2(2L_1 + L_2)x\right)$$

Največja vrednost povesa v področju prve upogibnice:

$$y_1(x) = \frac{FL_2}{6LEI_z}\left(-x^3 + L_1\left(L_1 + 2L_2\right)x\right)$$

$$y_1(0) = 0\,, \qquad y_1(L_1) = \frac{FL_2}{6LEI_z}\left(-L_1^3 + L_1\left(L_1 + 2L_2\right)L_1\right) = 1{,}74429mm$$

$$\frac{dy_1(x)}{dx} = 0 = \frac{FL_2}{6LEI_z}\left(-3x^2 + L_1\left(L_1 + 2L_2\right)\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{L_1\left(L_1 + 2L_2\right)}{3}} = 1{,}291m$$ - izven prvega polja torej nima fizikalnega pomena.

Največja vrednost povesa v področju druge upogibnice:

$$y_2(x) = \frac{FL_1}{6LEI_z}\left(-x^3 + L_2\left(2L_1 + L_2\right)x\right)$$

$$y_2(0) = 0\,, \qquad y_2(L_2) = \frac{FL_1}{6LEI_z}\left(-L_2^3 + L_2\left(2L_1 + L_2\right)L_2\right) = 1{,}74429mm$$

$$\frac{dy_2(x)}{dx} = 0 = \frac{FL_1}{6LEI_z}\left(-3x^2 + L_2\left(2L_1 + L_2\right)\right)$$

$$x = \sqrt{\frac{L_2\left(2L_1 + L_2\right)}{3}} = 1{,}633m$$ - pade v drugo polje!

$$\underline{\underline{y_2\,(1{,}633\text{ m}) = 1{,}89894\text{ mm}}}$$