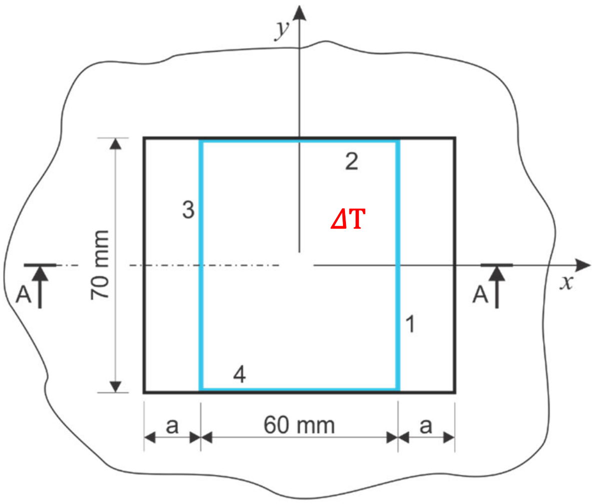
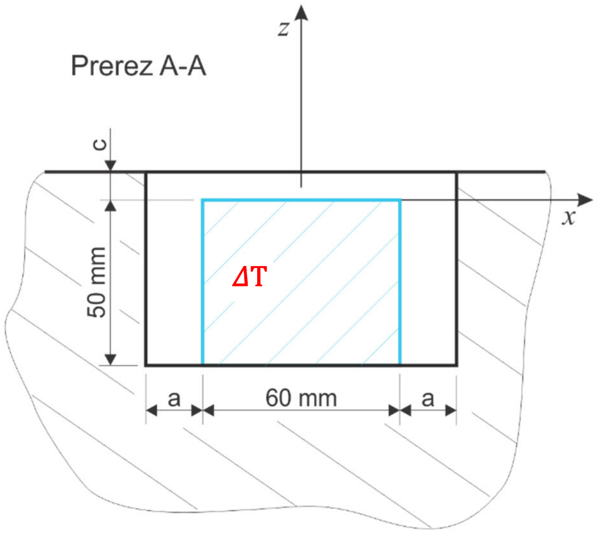
Dodatna naloga 1

V utor v nepodajnem/nedeformabilnem orodju je vstavljen bakren elastičen kvader (modro obarvan) tako, da je med kvadrom in utorom zračnost po sliki. Določite za koliko moramo segreti kvader, da bo zgornja površina kvadra ravno poravnana z zunanjo površino orodja. Trenje med kvadrom in orodjem zanemarimo.





Podatki:

$E = 110000$ MPa

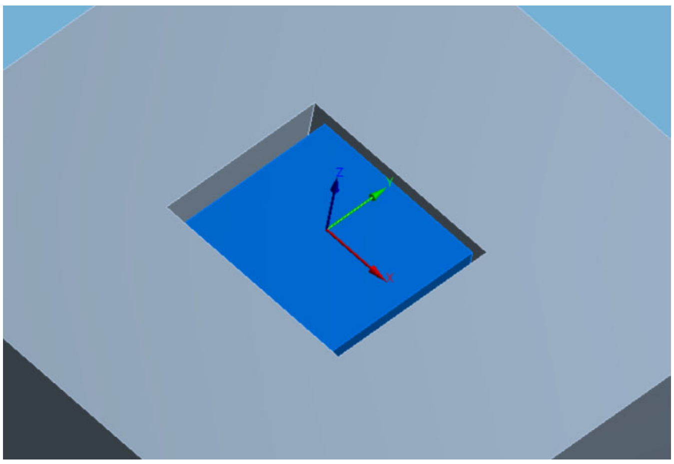
$\nu = 0{,}34$

$\alpha = 1{,}6 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$

$a = 0{,}055$ mm

$c = 0{,}100$ mm

$\Delta T = ?$



Rešitev:

Zgornja površina kvadra bo poravnana z zgornjo površino orodja, ko bo veljalo, da je raztezek kvadra v smeri osi z enak dimenziji c:

$$\Delta l_z = c$$

Raztezek kvadra v smeri osi z lahko izračunamo iz normalne deformacije v smeri osi z in začetne dimenzije kvadra v tej smeri:

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\Delta l_z}{l_{0z}} \quad \Rightarrow \quad \Delta l_z = \varepsilon_{zz} l_{0z}$$

Ko je zgornja površina kvadra poravnana z zgornjo površino orodja, za ε_{zz} tako velja:

$$c = \varepsilon_{zz} l_{0z} \quad \Rightarrow \quad \varepsilon_{zz} = \frac{c}{l_{0z}}$$

Na začetku kvader na stranskih površinah 1 in 3 ni v stiku z orodjem, medtem ko sta površini 2 in 4 že v stiku (v smeri osi y med kvadrom in orodjem ni zračnosti). V prvem koraku moramo preveriti, ali bo pri segrevanju prišlo tudi do stika površin 1 in 3 z orodjem. Izračun naredimo iz začetnega stanja, v katerem še nimamo stika teh površin. Takrat za komponente napetostnega tenzorja velja:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Strižne napetosti v kvadru so enake nič, ker nimamo nobenih zunanjih strižnih obremenitev, trenje med orodjem in kvadrom pa zanemarimo. Prav tako sta nič normalni napetosti v smereh osi x in z, ker se kvader v teh smereh lahko prosto širi, drugih zunanjih obremenitev (npr. zunanjih sil) pa nimamo. Pojavi pa se neznana normalna napetost v smeri osi y, s katero orodje »tišči« kvader, ki bi se rad v tej smeri zaradi segrevanja raztegnil.

V smereh osi x in z se kvader lahko razteguje, ampak normalnih deformacij v teh dveh smereh ne moremo izračunati iz Hooke-ovega zakona, če ne poznamo vseh diagonalnih komponent napetostnega tenzorja (čeprav že sedaj dejansko vemo, kakšno vrednost mora na koncu imeti ε_{zz}). Poznamo pa normalno deformacijo kvadra v smeri osi y, saj se v tej smeri kvader ne more raztegniti ($\varepsilon_{yy} = 0$). Za komponente deformacijskega tenzorja tako sledi:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\Delta l_y}{l_{0y}} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Zapišemo lahko enačbe Hooke-ovega zakona, ki povezujejo normalne komponente napetostnega in deformacijskega tenzorja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu(\sigma_{yy} + \sigma_{zz})\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{zz})\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu(\sigma_{xx} + \sigma_{yy})\right) + \alpha\Delta T$$

Ker vemo, kakšen ε_{zz} moramo doseči ($\varepsilon_{zz} = c/l_{0z}$), nam v zgornjih enačbah ostanejo 3 neznanke: ε_{xx}, σ_{yy} in ΔT. Žal v nobeni izmed teh enačb ne nastopa ena sama neznanka, zaradi česar se moramo malo potrudit in rešit sistem enačb (namig: iz druge in tretje enačbe se da prvo izračunati σ_{yy} in ΔT, zatem pa lahko iz prve enačbe izračunamo še ε_{xx}). Dobimo rezultat:

$$\sigma_{yy} = \frac{\varepsilon_{yy} - \varepsilon_{zz}}{\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}} = \frac{0 - c/l_{0z}}{\frac{1}{E} + \frac{\nu}{E}} = -164{,}18 \text{ MPa}$$

$$\Delta T = 93{,}284 \text{ K}$$

$$\varepsilon_{xx} = 0{,}002$$

Opazimo lahko, da stranici 1 in 3 prideta v stik z orodjem, saj velja:

$$\Delta l_x = \varepsilon_{xx} l_{0x} = 0{,}002 \cdot 60 \text{ mm} = 0{,}12 \text{ mm} > 2a = 0{,}11 \text{ mm}$$

Ker sedaj vemo, da bo kvader prišel v stik z orodjem tudi s površinama 1 in 3, moramo na novo zapisati robne pogoje za ta primer. Normalna napetost v smeri osi z bo še vedno enaka 0, pojavi pa se pa nova neznana normalna napetost v smeri osi x, s katero, podobno kot v smeri osi y, orodje »tlači« kvader, ki bi se rad v tej smeri zaradi segrevanja še naprej raztegnil. Za komponente napetostnega tenzorja tako sedaj velja:

$$(\sigma_{ij}) = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sedaj se kvader lahko prosto razteguje samo še v smeri osi z, ampak normalne deformacije v tej smeri, podobno kot prej, ne moremo izračunati iz Hooke-ovega zakona, če ne poznamo vseh diagonalnih komponent napetostnega tenzorja (zopet pa že vemo, kakšno vrednost mora na koncu imeti ε_{zz}). Poznamo pa sedaj tako normalno deformacijo kvadra v smeri osi y ($\varepsilon_{yy} = 0$), kot v smeri osi x, saj se kvader v smeri osi x lahko raztegne največ za vrednost zračnosti med orodjem in kvadrom. Za normalno deformacijo v smeri osi x tako sedaj velja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l_x}{l_{0x}} = \frac{2a}{l_{0x}} = \frac{2 \cdot 0{,}055\ \mathrm{mm}}{60\ \mathrm{mm}} = \frac{11}{6000}$$

Komponente deformacijskega tenzorja so tako:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \frac{11}{6000} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

Zopet lahko zapišemo enačbe Hooke-ovega zakona, ki povezujejo normalne komponente napetostnega in deformacijskega tenzorja:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{xx} - \nu\left(\sigma_{yy} + \sigma_{zz}\right)\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{yy} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{zz}\right)\right) + \alpha\Delta T$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{1}{E}\left(\sigma_{zz} - \nu\left(\sigma_{xx} + \sigma_{yy}\right)\right) + \alpha\Delta T$$

Podobno kot prej vemo kakšen ε_{zz} moramo doseči ($\varepsilon_{zz} = c/l_{0z}$), tako da nam v zgornjih enačbah ostanejo 3 neznanke: σ_{xx}, σ_{yy} in ΔT. Sistem enačb, ki ga moramo rešit je zelo zahteven, saj v vseh treh enačbah nastopajo vse tri neznanke. Dobra ideja v tem primeru je uporaba inverznega zapisa Hooke-ovega zakona, v katerem so izpostavljene komponente napetostnega tenzorja:

$$\sigma_{xx} = \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) + 2G\varepsilon_{xx} - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu}$$

$$\sigma_{yy} = \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) + 2G\varepsilon_{yy} - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu}$$

$$\sigma_{zz} = \lambda\left(\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}\right) + 2G\varepsilon_{zz} - \frac{E\alpha\Delta T}{1 - 2\nu}$$

Z uporabo teh zvez, lahko npr. iz zadnje enačbe neposredno izračunamo ΔT ter zatem rezultat vstavimo v prvi dve enačbi in izračunamo še napetosti σ_{xx} in σ_{yy}. Dobimo vrednosti:

$$\Delta T = 90{,}64\ \mathrm{K}, \quad \sigma_{yy} = -164{,}18\ \mathrm{MPa}, \quad \sigma_{xx} = -13{,}68\ \mathrm{MPa}.$$