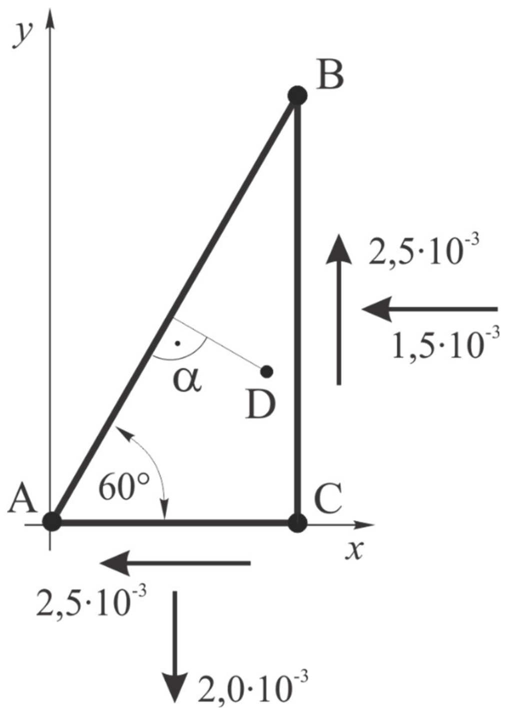
Dodatna naloga 4

V trikotni steni se pojavi ravninsko deformacijsko stanje. Določite spremembo dolžine stranice AB, če upoštevamo, da je premik točke C enak nič. Določite tudi spremembo pravega kota α.



Podatki:

$\overline{\mathrm{AC}} = 50$ mm

a) $\Delta\overline{\mathrm{AB}} = ?$

b) $\Delta\alpha = ?$

* Iz slike preberemo komponente tenzorja majhnih specifičnih deformacij:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} -1{,}5 & 2{,}5 & 0 \\ 2{,}5 & 2{,}0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot 10^{-3}$$

a) Izračunamo normalno deformacijo v smeri daljice AB in spremembo razdalje med točkama:

$$\varepsilon_{n,\overline{AB}} = \varepsilon_n(\varphi = 60°) = 3{,}29 \cdot 10^{-3}$$

$$\Delta\overline{AB} = \varepsilon_{n,\overline{AB}} \cdot \overline{AB} = 3{,}29 \cdot 10^{-3} \cdot 100 \text{ mm} = 0{,}329 \text{ mm}$$

b) Izračunamo strižno deformacijo na ravninah, ki oklepajo kot α:

$$\varepsilon_s(\varphi = 60°) = 2{,}655 \cdot 10^{-4}$$

$$\varepsilon_s(\varphi = 150°) = -2{,}655 \cdot 10^{-4}$$

Izračunamo absolutno vrednost spremembe kota α:

$$|\Delta\alpha| = 2 \cdot |\varepsilon_s(\varphi = 60°)| = 2 \cdot |\varepsilon_s(\varphi = 150°)| = 5{,}31 \cdot 10^{-4}$$

Predznak spremembe kota α določimo s pomočjo slike (puščici strižnih deformacij kažeta proti kotu):

$$\Delta\alpha = -5{,}31 \cdot 10^{-4}$$

$$\Delta\alpha = -0{,}0304°$$

*** Računanje sprememb dolžin in sprememb kotov iz premika točk.**

Za ravninsko, homogeno deformacijsko stanje lahko komponente vektorja premika točk izračunamo po sledečih enačbah:

$$(\varepsilon_{ij}) = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} u_x(x,y) &= \varepsilon_{xx} \cdot x + \varepsilon_{xy} \cdot y + C_1 \\ u_y(x,y) &= \varepsilon_{yx} \cdot x + \varepsilon_{yy} \cdot y + C_2 \end{aligned}$$

Konstanti C_1 in C_2 določimo iz robnih pogojev (vpetja stene). V našem primeru je točka C nepremično vpeta, od koder dobimo:

$$u_x(x_C, y_C) = \varepsilon_{xx} \cdot x_C + \varepsilon_{xy} \cdot y_C + C_1 = 0$$

$$u_y(x_C, y_C) = \varepsilon_{yx} \cdot x_C + \varepsilon_{yy} \cdot y_C + C_2 = 0$$

$$u_x(x_C, y_C) = \varepsilon_{xx} \cdot 50\text{ mm} + \varepsilon_{xy} \cdot 0 + C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_1 = -\varepsilon_{xx} \cdot 50\text{ mm} = 0{,}075\text{ mm}$$

$$u_y(x_C, y_C) = \varepsilon_{yx} \cdot 50\text{ mm} + \varepsilon_{yy} \cdot 0 + C_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad C_2 = -\varepsilon_{yx} \cdot 50\text{ mm} = -0{,}125\text{ mm}$$

Izračunamo komponente vektorja premika točke A in točke B:

$$u_x(x_A, y_A) = \varepsilon_{xx} \cdot 0 + \varepsilon_{xy} \cdot 0 + C_1 = 0{,}075\text{ mm}$$

$$u_y(x_A, y_A) = \varepsilon_{yx} \cdot 0 + \varepsilon_{yy} \cdot 0 + C_2 = -0{,}125\text{ mm}$$

$$u_x(x_B, y_B) = \varepsilon_{xx} \cdot 50\text{ mm} + \varepsilon_{xy} \cdot \sqrt{3} \cdot 50\text{ mm} + C_1 = 0{,}2165\text{ mm}$$

$$u_y(x_B, y_B) = \varepsilon_{yx} \cdot 50\text{ mm} + \varepsilon_{yy} \cdot \sqrt{3} \cdot 50\text{ mm} + C_2 = 0{,}1732\text{ mm}$$

Izračunamo končni položaj točk A in B:

$$\vec{r}_{A`} = \vec{r}_A + \vec{u}_A = (0\text{ mm}; 0\text{ mm}) + (0{,}075\text{ mm};\ -0{,}125\text{ mm})$$

$$\vec{r}_{A`} = (0{,}075\text{ mm};\ -0{,}125\text{ mm})$$

$$\vec{r}_{B`} = \vec{r}_B + \vec{u}_B = \left(50\text{ mm}; 50 \cdot \sqrt{3}\text{ mm}\right) + (0{,}2165\text{ mm};\ 0{,}1732\text{ mm})$$

$$\vec{r}_{B`} = (50{,}2165\text{ mm};\ 86{,}7757\text{ mm})$$

Izračunamo razdaljo med točkama A\` in B \`:

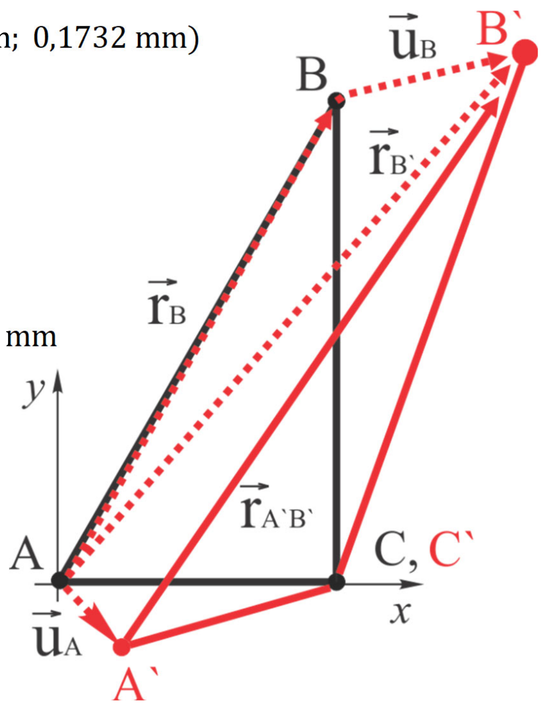
$$\overline{A`B`} = |\vec{r}_{A`B`}| = \sqrt{(x_{B`} - x_{A`})^2 + (y_{B`} - y_{A`})^2}$$

$$\overline{A`B`} = \sqrt{(50{,}2165 - 0{,}075)^2 + (86{,}7757 + 0{,}125\,)^2}\text{ mm}$$

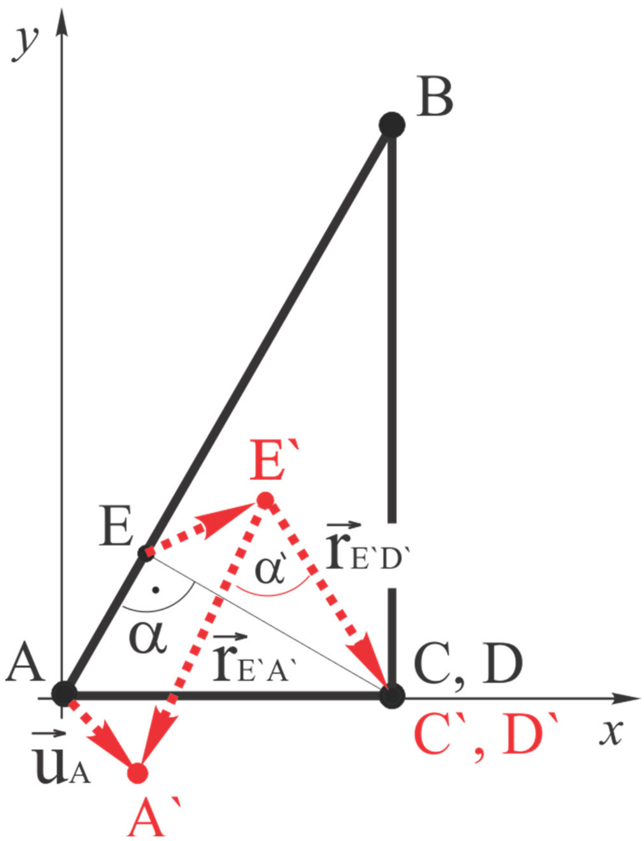
$$\overline{A`B`} = 100{,}329\text{ mm}$$

Sprememba razdalje med točkama A in B je tako:

$$\Delta\overline{AB} = \overline{A`B`} - \overline{AB} = 0{,}329\text{ mm}$$



Za izračun spremembe kota α si pomagamo s kosinusnim izrekom (v vektorski obliki). Ker je deformacijsko stanje homogeno, si lahko točni položaj kota α na daljici AB poljubno izberemo. Zaradi lažjega računanja si izberemo položaj po spodnji sliki (točka D naj sovpada s točko C):



Izračunamo komponente vektorja $\vec{r}_{E`A`}$ in $\vec{r}_{E`D`}$:

$$\vec{r}_{E`A`} = \vec{r}_{A`} - \vec{r}_{E`} = \vec{r}_A + \vec{u}_A - (\vec{r}_E + \vec{u}_E) = \cdots = (-12{,}53537659;\ -21{,}72518637)\ \text{mm}$$

$$\vec{r}_{E`D`} = \vec{r}_{D`} - \vec{r}_{E`} = \vec{r}_D + \vec{u}_D - (\vec{r}_E + \vec{u}_E) = \cdots = (37{,}38962341;\ -21{,}60018637)\ \text{mm}$$

$$\vec{r}_A = (0; 0)\ \text{mm}, \quad \vec{u}_A = (0{,}075;\ -0{,}125)\ \text{mm}$$

$$\vec{r}_E = \left(12{,}5; 12{,}5 \cdot \sqrt{3}\right)\ \text{mm}, \quad \vec{u}_E = (0{,}110377;\ -0{,}050448)\ \text{mm}$$

$$\vec{r}_D = (50; 0)\ \text{mm}, \quad \vec{u}_D = (0;\ 0)\ \text{mm}$$

Skladno s kosinusnim izrekom velja naslednja enačba:

$$\vec{r}_{E`A`} \cdot \vec{r}_{E`D`} = |\vec{r}_{E`A`}||\vec{r}_{E`D`}| \cdot \cos\alpha`$$

$$\cos\alpha` = \frac{\vec{r}_{E`A`} \cdot \vec{r}_{E`D`}}{|\vec{r}_{E`A`}||\vec{r}_{E`D`}|} = \cdots = \frac{0{,}57506\ \text{mm}^2}{25{,}08225\ \text{mm} \cdot 43{,}18046\ \text{mm}} = 0{,}000530957$$

$$\alpha` = 89{,}9696°$$

Sprememba kota α tako znaša:

$$\Delta\alpha = \alpha` - \alpha = 89{,}9696° - 90° = -0{,}0304°$$