Dodatna naloga 1

1.) Dimenzionirajte narisano paličje. Tlačno obremenjene palice lahko uklonijo.

$\sigma_{\mathrm{M}} = 360\ \mathrm{MPa}$

$\sigma_{\mathrm{PL}} = 250\ \mathrm{MPa}$

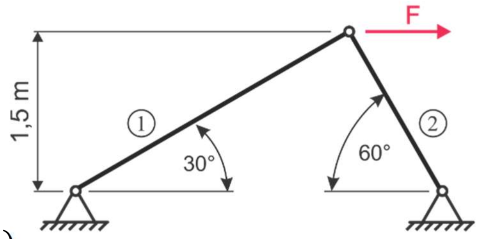
$\sigma_{\mathrm{PR}} = 190\ \mathrm{MPa}$

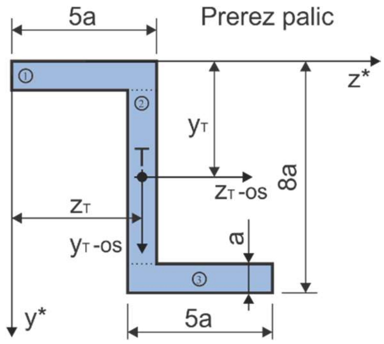
$F = 10\ \mathrm{kN}$

$n = 6 \quad (\text{faktor varnosti})$

$E = 210000\ \mathrm{MPa}$

$a = ?$





Rešitev:

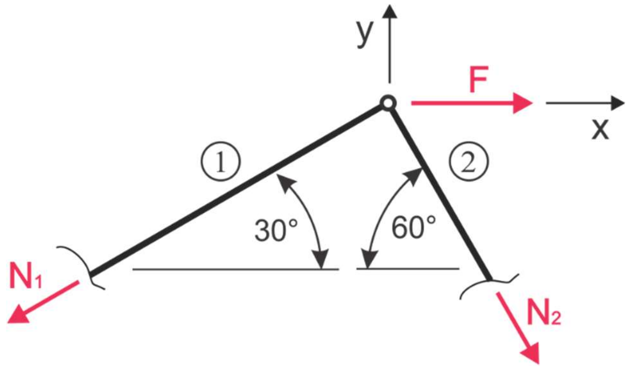
a) Izračunamo notranji osni sili v palicah. Izrežemo vozlišče, kjer se palici stikata:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad F + N_2 \cos 60° - N_1 \cos 30° = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad -N_2 \sin 60° - N_1 \sin 30° = 0$$

$$N_1 = \frac{F}{\dfrac{\sin 30° \cos 60°}{\sin 60°} + \cos 30°} = 8660{,}254\ \mathrm{N}$$

$$N_2 = -\frac{N_1 \sin 30°}{\sin 60°} = -5000\ \mathrm{N}$$



b) Notranja sila v palici 1 je natezna. Ta palica zagotovo ne bo uklonila in jo lahko dimenzioniramo na mejo tečenja po enačbi:

$$\sigma_{\mathrm{xx},1} = \frac{N_1}{A} \leq \sigma_{\mathrm{DOP}} = \frac{\sigma_{\mathrm{PL}}}{n}$$

Potrebujemo samo še površino prereza palice A:

$$A = 5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a = 16a^2$$

Zadnji rezultat vstavimo v enačbo za dimenzioniranje in izračunamo dimenzijo a:

$$\frac{N_1}{A} \leq \frac{\sigma_{\mathrm{PL}}}{n}$$

$$\frac{N_1}{16a^2} \leq \frac{\sigma_{\mathrm{PL}}}{n}$$

$$a \geq \sqrt{\frac{nN_1}{16\sigma_{\mathrm{PL}}}} = \sqrt{\frac{6 \cdot 8660{,}254\ \mathrm{N}}{16 \cdot 250\ \mathrm{MPa}}}$$

$$a \geq 3{,}604\ \mathrm{mm} \quad (a = 3{,}7\ \mathrm{mm})$$

Za palico 1 mora biti dimenzija a večja od 3,604 mm, da se palica ne prične plastično deformirati.

c) Notranja sila v palici 2 je tlačna. Palica 2 lahko ukloni, kar moramo upoštevati pri dimenzioniranju. Izračunati moramo minimalni (oz. po dogovoru drugi glavni) vztrajnostni moment prereza. Prvo izračunamo vztrajnostna momenta in deviacijski moment prereza v težiščnem koordinatnem sistemu $y_{\mathrm{T}} - z_{\mathrm{T}}$. Poiščemo položaj težišča:

$$y_{\mathrm{T}} = \frac{0{,}5a \cdot 5a \cdot a + 4a \cdot a \cdot 6a + 7{,}5a \cdot 5a \cdot a}{5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a} = 4a$$

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{2{,}5a \cdot 5a \cdot a + 4{,}5a \cdot a \cdot 6a + 6{,}5a \cdot 5a \cdot a}{5a \cdot a + a \cdot 6a + 5a \cdot a} = 4{,}5a$$

Izračunamo težiščni vztrajnostni moment okoli težiščne z_{T} - osi:

$$I_{z_T} = \frac{5a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (6a)^3}{12} + \frac{5a \cdot a^3}{12} + (3{,}5a)^2 \cdot 5a^2 + (3{,}5a)^2 \cdot 5a^2 = 141{,}33a^4$$

Izračunamo težiščni vztrajnostni moment okoli težiščne y_{T} - osi:

$$I_{y_T} = \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + \frac{6a \cdot a^3}{12} + \frac{a \cdot (5a)^3}{12} + (2a)^2 \cdot 5a^2 + (2a)^2 \cdot 5a^2 = 61{,}33a^4$$

Izračunamo težiščni deviacijski moment v koordinatnem sistemu $y_{\mathrm{T}} - z_T$:

$$I_{y_T z_T} = (-2a) \cdot (-3{,}5a) \cdot 5a^2 + (2a) \cdot (3{,}5a) \cdot 5a^2 = 70a^4$$

V koordinatnem sistemu glavnih vztrajnostnih osi je deviacijski vztrajnostni moment vedno enak nič, kar pomeni, da težiščni vztrajnostni osi y_{T} in z_{T} nista glavni vztrajnostni osi. Izračunamo glavna vztrajnostna momenta prereza:

$$I_{1,2} = \frac{I_{y_T} + I_{z_T}}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_{y_T} - I_{z_T}}{2}\right)^2 + I_{y_T z_T}{}^2} = 101{,}33a^4 \pm 80{,}62a^4$$

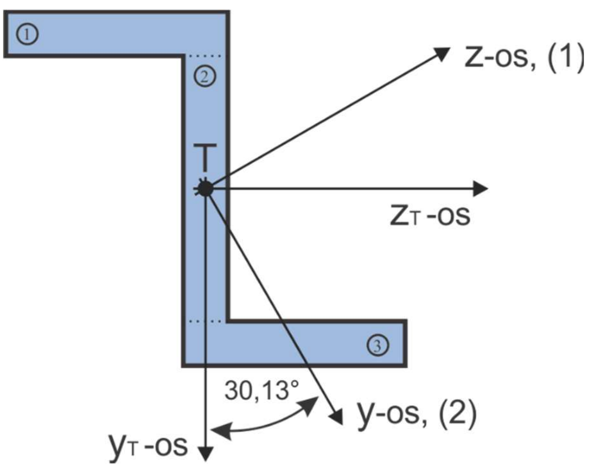
$$I_1 = 181{,}95a^4$$

$$I_2 = 20{,}71a^4 = I_{MIN}$$

Izračunamo lahko še lego glavnih vztrajnostnih osi (ta korak ni nujen za dimenzioniranje na uklon, saj potrebujemo le velikost minimalnega vztrajnostnega momenta, kar smo že izračunali):

$$\tan 2\alpha = \frac{2I_{yTzT}}{I_{zT} - I_{yT}} = \frac{7}{4} \quad \Rightarrow \quad \alpha = 30{,}13° \;\; , \quad \alpha = 120{,}13° \;\; , \ldots$$

$$I_u(\varphi = 30{,}13°) = 20{,}71a^4 = I_2 \quad \Rightarrow \quad \alpha_2 = 30{,}13° \;\; , \;\; \alpha_1 = 120{,}13°$$



Izračunamo dejansko vitkost (λ_{DEJ}) palice 2:

$$\lambda_{\mathrm{DEJ}} = \frac{\beta L}{i_{\mathrm{MIN}}}$$

$$\beta = 1, \quad L = \frac{1{,}5\ \mathrm{m}}{\sin 60°} = \sqrt{3}\ \mathrm{m}$$

$$i_{\mathrm{MIN}} = \sqrt{\frac{I_{MIN}}{A}} = \sqrt{\frac{20{,}71a^4}{16a^2}} = 1{,}1377a$$

$$\lambda_{\mathrm{DEJ}} = \frac{\beta L}{i_{\mathrm{MIN}}} = \frac{\sqrt{3}\ \mathrm{m}}{1{,}1377a}$$

Predpostavimo, da smo v Tetmajer-jevem področju. Za mehko jeklo ($\sigma_{\mathrm{M}} = 360\ \mathrm{MPa}$) velja:

$$\sigma_{\mathrm{KR}} = 310\ \mathrm{MPa} - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \lambda_{\mathrm{DEJ}}$$

Izpeljane izraze vstavimo v enačbo za dimenzioniranje:

$$\left|\sigma_{\mathrm{xx},2}\right| = \frac{|N_2|}{A} \leq \sigma_{\mathrm{DOP}} = \frac{\sigma_{\mathrm{KR}}}{n} = \frac{310\ \mathrm{MPa} - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \lambda_{\mathrm{DEJ}}}{n}$$

$$\frac{|N_2|}{A} \leq \frac{310\ \mathrm{MPa} - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \lambda_{\mathrm{DEJ}}}{n}$$

$$\frac{|N_2|}{16a^2} \leq \frac{310\ \mathrm{MPa} - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1000\ \mathrm{mm}}{1{,}1377a}}{n}$$

$$n|N_2| \leq 16a^2 \left(310\ \mathrm{MPa} - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \frac{\sqrt{3} \cdot 1000\ \mathrm{mm}}{1{,}1377a}\right)$$

$$310\ \mathrm{MPa} \cdot 16a^2 - 1{,}14\ \mathrm{MPa} \cdot \sqrt{3} \cdot 1000\ \mathrm{mm} \cdot 14{,}063\mathrm{a} - n|N_2| \geq 0$$

Rešitvi zgornje kvadratne neenačbe sta:

$$\mathrm{a} \geq 6{,}53\ \mathrm{mm}$$

$$\mathrm{a} \leq -0{,}927\ \mathrm{mm}$$

Fizikalno sprejemljiv rezultat je tako:

$$\mathrm{a} \geq 6{,}53\ \mathrm{mm} \qquad (a = 6{,}6\ \mathrm{mm})$$

Preverimo, če smo dejansko v Tetmajer-jevem področju. Izračunamo dejansko vitkost palice:

$$\lambda_{\mathrm{DEJ}} = \frac{\beta L}{i_{\mathrm{MIN}}} = \frac{\sqrt{3}\ \mathrm{m}}{1{,}1377a} = 233{,}14$$

Izračunamo zgornjo (»desno«) mejo Tetmajer-jevega področja:

$$\lambda_{\mathrm{PR}} = \pi \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\mathrm{PR}}}} = 104{,}44$$

Spodnje (»leve«) meje področja ni potrebno računati, ker smo že ugotovili, da naš rezultat ni v Tetmajer-jevem področju, ampak v Euler-jevem področju. Premaknemo se torej v Euler-jevo področje.

Za kritično uklonsko napetost v Euler-jevem področju velja:

$$\sigma_{\mathrm{KR}} = \frac{\pi^2 E}{{\lambda_{\mathrm{DEJ}}}^2}$$

Zgornji izraz stavimo v enačbo za dimenzioniranje:

$$|\sigma_{\mathrm{xx},2}| = \frac{|N_2|}{A} \leq \sigma_{\mathrm{DOP}} = \frac{\sigma_{\mathrm{KR}}}{n} = \frac{\pi^2 E}{n{\lambda_{\mathrm{DEJ}}}^2}$$

$$\frac{|N_2|}{16a^2} \leq \frac{\pi^2 E}{n\left(\frac{\sqrt{3}\ \mathrm{m}}{1{,}1377a}\right)^2}$$

$$a \geq \sqrt[4]{\frac{n|N_2|\left(\frac{\sqrt{3}\cdot 1000\ \mathrm{mm}}{1{,}1377}\right)^2}{16\pi^2 E}} = 6{,}767\ \mathrm{mm} \quad (a = 6{,}8\ \mathrm{mm})$$

Še preverimo, če smo v Euler-jevem področju. Izračunamo dejansko vitkost palice:

$$\lambda_{\mathrm{DEJ}} = \frac{\beta L}{i_{\mathrm{MIN}}} = \frac{\sqrt{3}\ \mathrm{m}}{1{,}1377a} = 224{,}97$$

Še vedno smo v Euler-jevem področju ($\lambda_{\mathrm{DEJ}} > \lambda_{\mathrm{PR}}$). Za palico 2 mora tako dimenzija a biti večja od 6,767 mm, da palica ne bo uklonila.