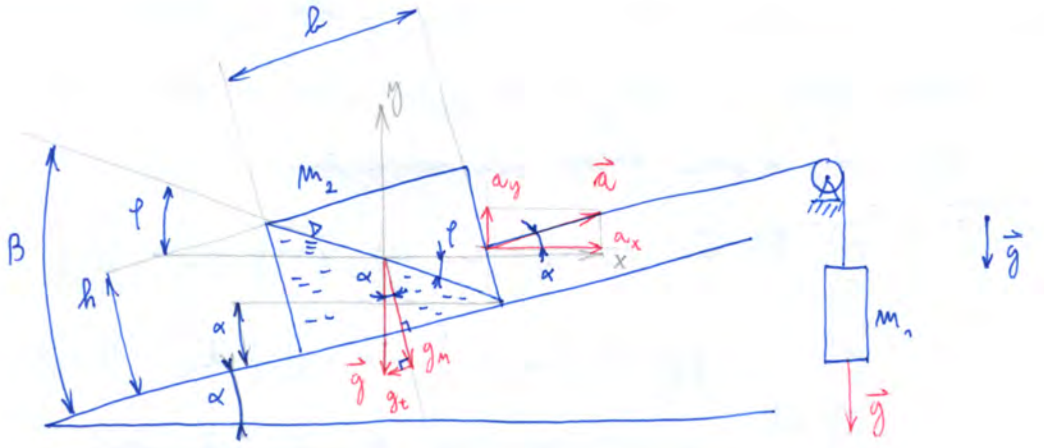
Naloga 3. Določite, kolikšno mora biti razmerje m2 proti m1, da se voda v posodi na sliki ravno še ne prelije preko roba, če zanemarimo koeficient trenja.

Podatki: $\alpha = 15°$, $l = 80\,mm$, $h = 25\,mm$, $m_2 = 3.6\,kg$

$m_1 = ?$



$$\beta = \alpha + \varphi \rightarrow \varphi = \beta - \alpha = \arctan\frac{h}{l} - \alpha = \arctan\frac{25\,mm}{80\,mm} - 15° =$$

$$= 17{,}354° - 15° = 2{,}354°$$ → V koord. sistemu, ki se nahaja na gladini, je $\varphi < 0$ (iz definicije naklona gladine, ki je v tem primeru negativen).

→ Iz enačbe za izobaro gladine vode v posodi:

$$\frac{dy}{dx} = \tan\varphi = -\frac{a_x}{a_y + g} = -\frac{a\cos\alpha}{a\sin\alpha + g} \rightarrow \tan\varphi\,(a\sin\alpha + g) = -a\cos\alpha$$

$$g\tan\varphi = -a(\cos\alpha + \sin\alpha\tan\varphi)$$

$$a = -g\frac{\tan\varphi}{\cos\alpha + \sin\alpha\tan\varphi} = -9{,}807\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{\tan(-2{,}354°)}{\cos(15°) + \sin(15°)\cdot\tan(-2{,}354°)} =$$

$$= -9{,}807\,\frac{m}{s^2}\cdot\frac{-0{,}0411}{0{,}9659 + 0{,}2588\cdot(-0{,}0411)} = 0{,}4219\,\frac{m}{s^2}$$

Negativen predznak

→ Iz ravnotežja sil: (2. Newtonov zakon)

$$m_1 g - m_2 g_t = (m_1 + m_2)\,a$$

$$m_1 g - m_2 g\sin\alpha = (m_1 + m_2)\,a$$

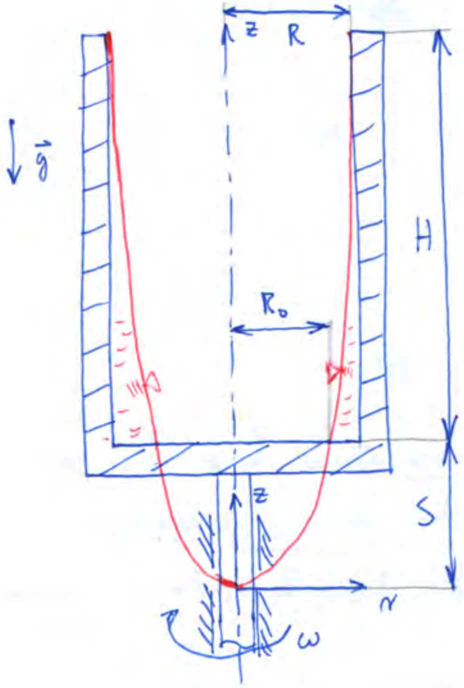
$$m_1(g - a) = m_2(g\sin\alpha + a)$$

$$m_1 = m_2\frac{g\sin\alpha + a}{g - a} = \frac{3{,}6\,kg}{3{,}17} = \boxed{1{,}1357\,kg}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{g - a}{g\sin\alpha + a} = \frac{9{,}807\,\frac{m}{s^2} - 0{,}4219\,\frac{m}{s^2}}{9{,}807\,\frac{m}{s^2}\cdot\sin(15°) + 0{,}4219\,\frac{m}{s^2}} = \boxed{3{,}17}$$

Naloga 4. Posoda cilindrične oblike je napolnjena z vodo do višine h. Določi največjo možno hitrost, s katero se posoda lahko vrti, ne da bi se tekočina izlila iz nje.

→ Opomba: Določiti je potrebno hitrost vrtenja posode, pri ~~kateri~~ se kateri se tekočina ravno še ne izlije preko roba posode. Hitrost, pri kateri se VSA tekočina izlije iz posode, divergira proti neskončnosti.



$$\vec{a} = (a_r, a_z) = (\omega^2 r, 0), \quad \vec{g} = (g_r, g_z) = (0, -g)$$

$$\vec{\nabla} p = \rho(\vec{g} - \vec{a}) = \rho(\omega^2 r, -g) \;\Big/ \cdot\, d\vec{r} \qquad d\vec{r} = (dr, dz)$$

$$dp = \rho(\omega^2 r\, dr - g\, dz)$$

↳ Izobara gladine: $dp = 0 \rightarrow \frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2}{g} r$

$$\int dz = \frac{\omega^2}{g}\int r\, dr \rightarrow z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2 + C$$

↳ Konstanto C določimo preko robnega pogoja:

$$z(R) = S + H \Longrightarrow S + H = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + C \rightarrow C = S + H - \frac{\omega^2}{2g} R^2$$

↳ $z(r) = \frac{\omega^2}{2g}(r^2 - R^2) + S + H$

↳ Višino S določimo preko pogoja $z(0) = 0$:

$$z(0) = -\frac{\omega^2}{2g} R^2 + S + H = 0 \rightarrow S = \frac{\omega^2}{2g} R^2 - H$$

↳ Sledi torej enačba gladine: $z(r) = \frac{\omega^2}{2g} r^2$

→ Volumen vode v posodi je med vrtenjem enak kot pri mirovanju:

volumen rotacijskega telesa

$$V_1 = \pi R^2 h, \qquad V_2 = \pi R^2 H - \pi \int_S^{S+H} r^2(z)\, dz =$$

$$= \pi\left[R^2 H - \int_S^{S+H} \frac{2g}{\omega^2} z\, dz\right] = \pi\left[R^2 H - \frac{\cancel{2}g}{\omega^2} \cdot \frac{z^2}{\cancel{2}}\Big|_S^{S+H}\right] =$$

$$= \pi\left[R^2 H - \frac{g}{\omega^2}\left((S+H)^2 - S^2\right)\right] = \pi\left[R^2 H - \frac{g}{\omega^2}\left(\left(\frac{\omega^2}{2g} R^2 \cancel{-H} \cancel{+H}\right)^2 - \left(\frac{\omega^2}{2g} R^2 - H\right)^2\right)\right]$$

$$V_1 = V_2 \rightarrow \cancel{\pi} R^2 h = \cancel{\pi}\left[R^2 H - \frac{g}{\omega^2}\left(\left(\frac{\omega^2}{2g}\right)^2 R^4 - \left(\frac{\omega^2}{2g}\right)^2 R^4 + 2\cdot\frac{\omega^2}{2g} R^2 H - H^2\right)\right]$$

$$R^2 h = R^2 H - \frac{g}{\omega^2}\cdot\frac{\omega^2}{g} R^2 H + \frac{g}{\omega^2} H^2 \rightarrow \omega^2 = \frac{g}{h}\cdot\frac{H^2}{R^2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{h}}\cdot\frac{H}{R} = \sqrt{\frac{9{,}807\ \frac{m}{s^2}}{0{,}75\ m}}\cdot\frac{2\ m}{0{,}5\ m} = \boxed{14{,}4643\ s^{-1}}$$

(Privzamemo, da je $\omega > 0$)

→ Kolikšna pa bi morala biti ω, da bi se vsa voda izlila iz posode?

$$\frac{dz}{dr} = \frac{\omega^2 r}{g} = \tan\varphi \rightarrow \frac{\omega^2 R}{g} = \lim_{\varphi^* \to \frac{\pi}{2}} \varphi^* \rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}\lim_{\varphi^* \to \frac{\pi}{2}} \varphi^*}$$

tan(phi*) zgoraj