Dodatna naloga 7

1.) Za konstrukcijo na sliki preverite statično določenost in izračunajte sile v palicah in raztezke palic.

$E_{cu} = 100$ GPa

$E_{je} = 200$ GPa

$L_1 = 2$ m $= L_{je}$

$L_2 = 1$ m

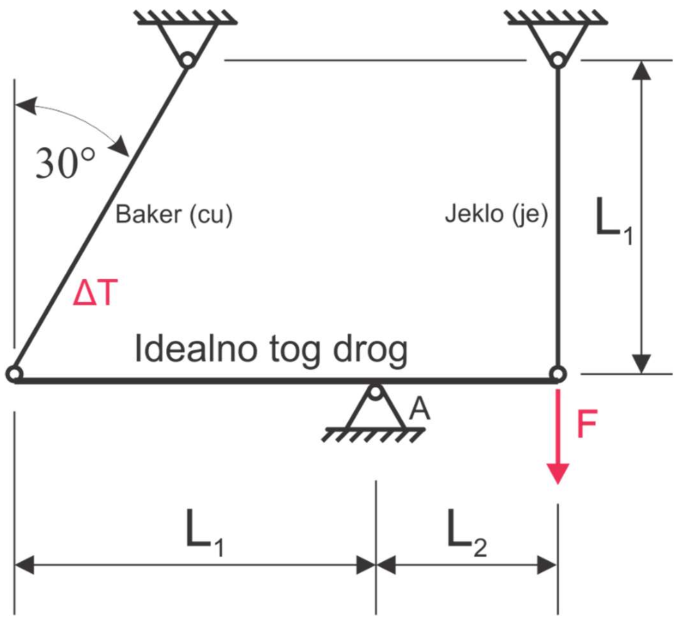
$\alpha_{cu} = 1{,}6 \cdot 10^{-5}$ K^{-1}

$\Delta T = 30°$C

$F = 5$ kN

$A_{je} = 1200$ mm^2

$A_{cu} = 1500$ mm^2



---

a) Statična določenost = ?

b) $N_{je}, N_{cu}, \Delta L_{je}, \Delta L_{cu} = ?$

a) Preverimo statično določenost po enačbi:

$$2 \cdot \text{č} + \text{n} = 3 \cdot \text{p} + 2 \cdot \text{v}$$

$$2 \cdot 7 + 6 \neq 3 \cdot 3 + 2 \cdot 5$$

$20 > 19$ – sistem je 1x statično nedoločen

b) Zapišemo ravnovesne enačbe statike:

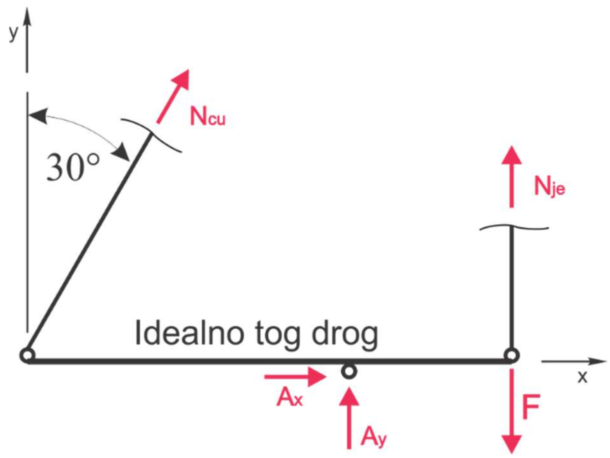
$$\sum F_{ix} = 0; \quad N_{cu} \sin 30° + A_x = 0$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad N_{cu} \cos 30° + N_{je} + A_y - F = 0$$

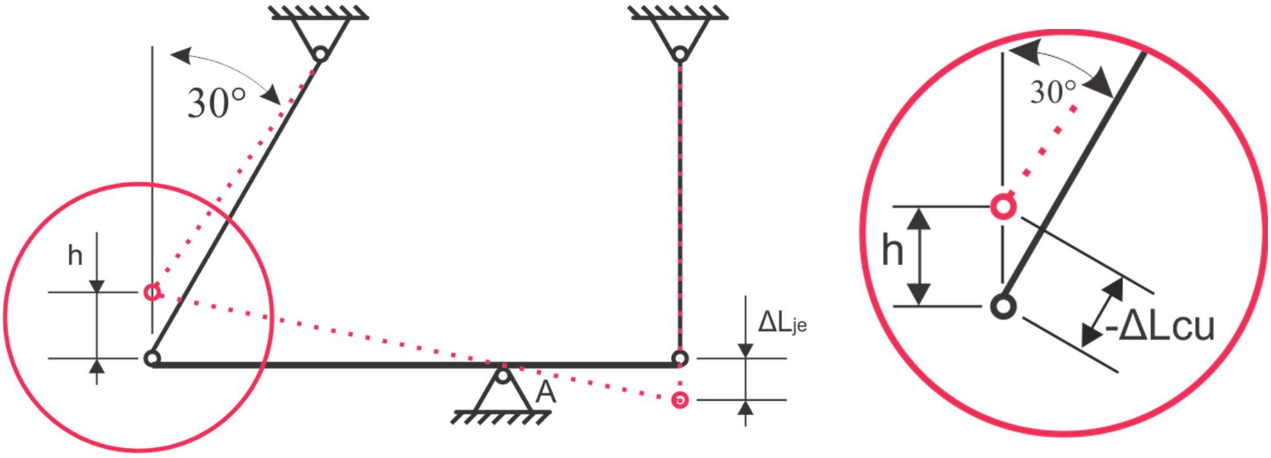
$$\sum M_{iA} = 0; \; N_{cu} \cos 30° \, L_1 - N_{je} L_2 + F L_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad N_{je} = F + \sqrt{3} N_{cu} \qquad (1)$$

Dobili smo sistem treh enačb s štirimi neznankami (dve sili v podpori A ter sili v bakreni in jekleni palici), kar pomeni, da potrebujemo še deformacijsko enačbo.

Ker smo pametno izbrali točko za zapis momentne ravnovesne enačbe, v slednji nastopata samo tisti dve neznanki, ki nas zanimata t.j. sili v palicah. Izkaže se, da lahko v takšnih primerih momentno enačbo in deformacijsko enačbo rešimo posebej kot sistem dveh enačb z dvema neznankama.



c) Zapišemo deformacijsko enačbo. Predpostavimo, da se jeklena palica raztegne, bakrena pa skrči. Idealno tog drog je nedeformabilen in se premakne kot togo telo (rotira okrog točke A). Ker so premiki majhni, lahko zanemarimo, da se vozlišča na drogu dejansko premikajo po krožnici (obravnavamo, kot da se vseskozi premikajo v isti smeri kot ob začetku deformiranja).



Iz podobnih trikotnikov z vrhom v točki A dobimo:

$$\frac{\Delta L_{je}}{L_2} = \frac{h}{L_1}$$

Iz detajla na desni sliki pa lahko razberemo:

$$h = \frac{-\Delta L_{cu}}{\cos 30°} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta L_{je}}{L_2} = \frac{-\Delta L_{cu}}{L_1 \cos 30°}$$

V zadnjo enačbo vstavimo deformacijsko enačbo posamezne palice:

$$\Delta L_{cu} = \frac{N_{cu} L_{cu}}{E_{cu} A_{cu}} + L_{cu} \alpha_{cu} \Delta T, \quad \Delta L_{je} = \frac{N_{je} L_{je}}{E_{je} A_{je}}$$

Če v deformacijsko enačbo vstavimo še podatke in malo poračunamo, dobimo rezultat:

$$N_{je} = -\frac{16}{15} N_{cu} - 76800 \text{ N}$$

Zadnjo enačbo vstavimo v enačbo (1):

$$N_{je} = F + \sqrt{3} N_{cu}$$

$$-\frac{16}{15} N_{cu} - 76800 \text{ N} = F + \sqrt{3} N_{cu}$$

Iz zadnje enačbe lahko izračunamo osno silo v bakreni palici in zatem poračunamo še ostale rezultate:

$$N_{cu} = -29227{,}67 \text{ N (tlačna obremenitev)}$$

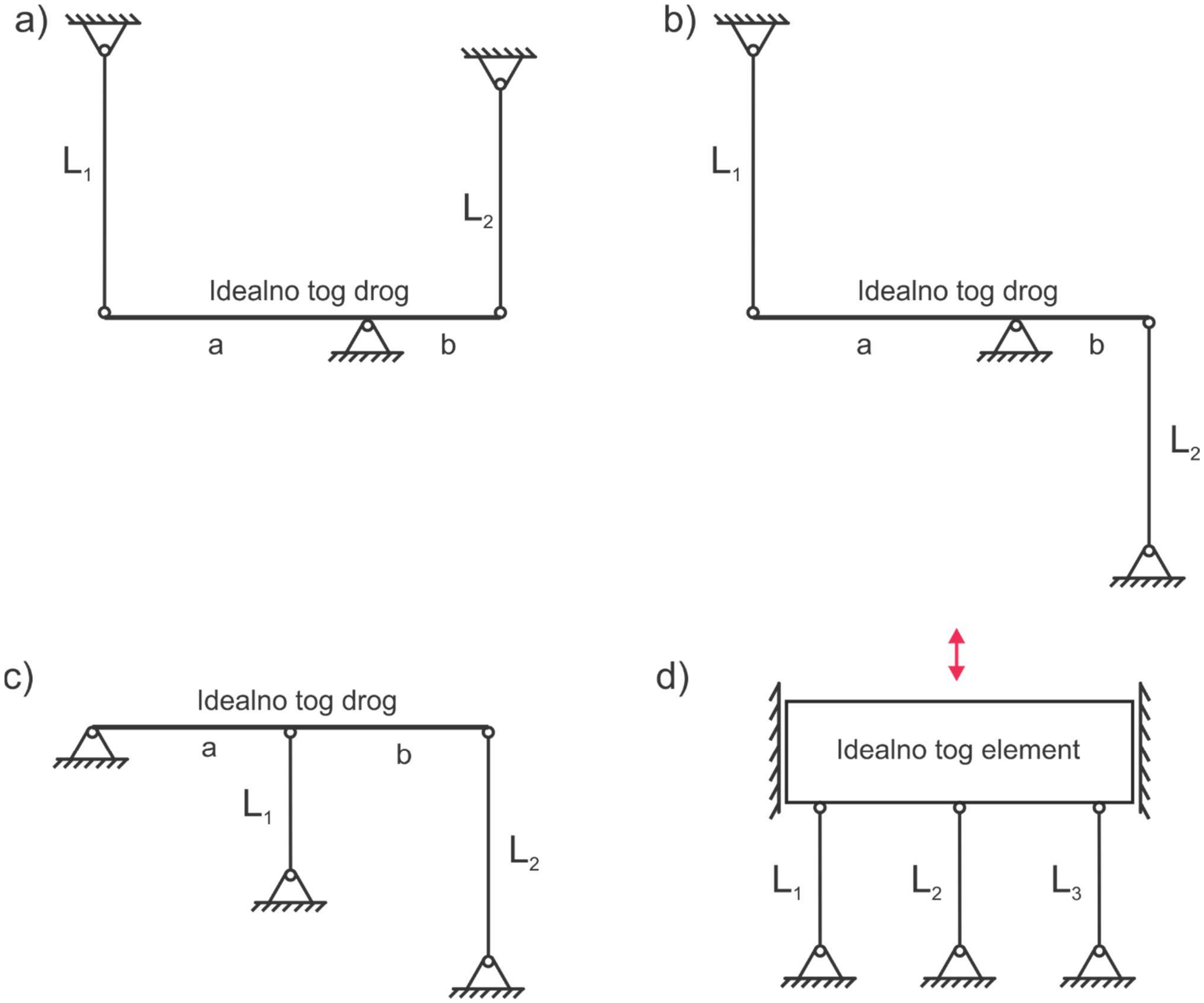
$$N_{je} = -45623{,}82 \text{ N (tlačna obremenitev)}$$

$$\Delta L_{cu} = 0{,}6585 \text{ mm (palica se raztegne)}$$

$$\Delta L_{je} = -0{,}3802 \text{ mm (palica se skrči)}$$

Opazimo lahko, da smo napačno predpostavili smer deformiranja sistema, saj se bakrena palica dejansko raztegne, jeklena se pa skrči. Rezultati so kljub temu pravilni.

Dodatek. Zapišite deformacijske enačbe za naslednje primere:



Odgovori:

$a)\ \frac{\Delta L_1}{a} = -\frac{\Delta L_2}{b}$

$b)\ \frac{\Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_2}{b}$

$c)\ \frac{\Delta L_1}{a} = \frac{\Delta L_2}{a+b}$

$d)\ \Delta L_1 = \Delta L_2 = \Delta L_3$

2.) Določite sile in napetosti v gredeh/palicah za $\Delta T = 50°\mathrm{C}$ in $\Delta T = 80°\mathrm{C}$. Segrevamo le desno gred!

$E_{cu} = 1{,}25 \cdot 10^5\ \mathrm{MPa}$

$E_{je} = 2{,}1 \cdot 10^5\ \mathrm{MPa}$

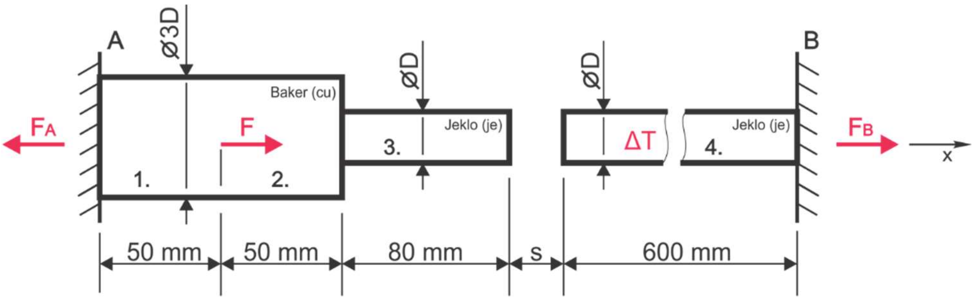
$\alpha_{je} = 1{,}2 \cdot 10^{-5}\ \mathrm{K}^{-1}$

$D = 40\ \mathrm{mm}$

$\Delta T = 50°\mathrm{C},\ 80°\mathrm{C}$

$F = 500000\ \mathrm{N}$

$s = 0{,}5\ \mathrm{mm}$



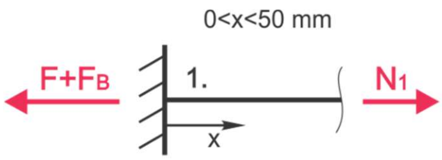
$N_1, N_2, N_3, N_4 = ?$

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4 = ?$

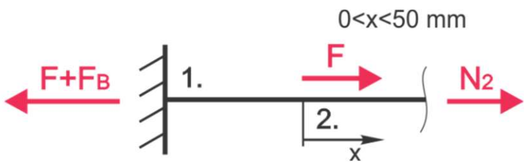
a) Zapišemo ravnovesno enačbo za sile v smeri osi x:

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -F_A + F + F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad F_A = F + F_B \tag{1}$$

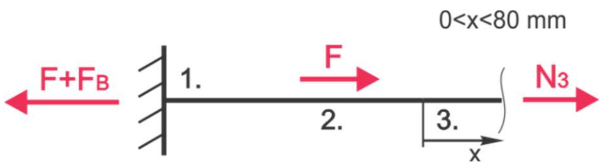
b) Nosilec razrežemo po poljih. Pri tem že upoštevamo enačbo (1), da se znebimo ene neznanke (F_A):



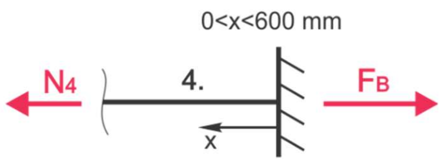
$$N_1 = F + F_B$$



$$N_2 = F_B$$



$$N_3 = F_B$$



$$N_4 = F_B$$

c) Preverimo, če leva in desna gred prideta v stik. Preverjanje začnemo iz začetnega stanja, ko gredi nista v stiku. Takrat velja, da je $F_B = 0$, iz česar lahko takoj izračunamo vse notranje sile:

$$F_B = 0 \quad \Rightarrow \quad N_2 = N_3 = N_4 = 0, \quad N_1 = F = 500000\ \mathrm{N}$$

Ker so notranje sile znane, lahko izračunamo skupen raztezek vseh gredi/polj (označimo z ΔL):

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4$$

$$\Delta L_i = \frac{N_i L_i}{E_i A_i} + L_i \alpha_i \Delta T_i$$

- za $\Delta T = \Delta T_4 = 50°\mathrm{C}$ dobimo:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = 0{,}37768\ \mathrm{mm}\ (\text{gredi ne prideta v stik, ker je } \Delta L < s)$$

Pri segrevanju desne gredi za $\Delta T = 50°\text{C}$ tako že imamo rezultat:

$$N_1 = 500000 \text{ N}$$

$$N_2 = N_3 = N_4 = 0$$

Izračunamo lahko še napetosti:

$$\sigma_i = \frac{N_i}{A_i} \quad \Rightarrow \quad \sigma_1 = 44{,}21 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_4 = 0$$

- za $\Delta T = \Delta T_4 = 80°\text{C}$ pa dobimo:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = 0{,}59368 \text{ mm (gredi prideta v stik, ker je } \Delta L > s)$$

Pri segrevanju desne gredi za $\Delta T = 80°\text{C}$, gredi prideta v stik in pojavi se neznana reakcijska sila v podpori B, ki je iz statike ne moremo izračunati (zaradi pojava te sile pa se tudi reakcijska sila v podpori A spremeni). Za preračun reakcijskih sil in notranjih sil v gredeh sedaj potrebujemo deformacijsko enačbo. Velja, da ko sta gredi v stiku, mora biti seštevek vseh raztezkov posameznih gredi/polj točno enak začetni zračnosti med gredema – to velja tako, ko se gredi ravno dotakneta, kot če jih naprej obremenjujemo (če pri tem ostajata v stiku). Deformacijska enačba je tako:

$$\Delta L = \Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 = s$$

$$\frac{N_1 L_1}{E_{cu} A_1} + \frac{N_2 L_2}{E_{cu} A_2} + \frac{N_3 L_3}{E_{je} A_3} + \frac{N_4 L_4}{E_{je} A_4} + L_4 \alpha_{je} \Delta T_4 = s$$

Notranje sile v zgornji enačbi lahko izrazimo z reakcijsko silo v podpori B (glej točko b)):

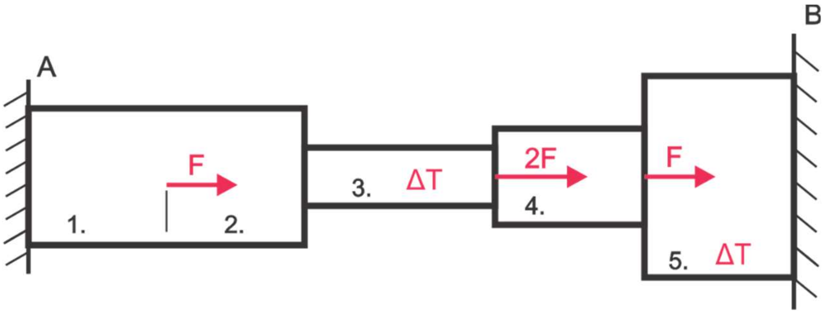
$$\frac{(F + F_B) L_1}{E_{cu} A_1} + \frac{F_B L_2}{E_{cu} A_2} + \frac{F_B L_3}{E_{je} A_3} + \frac{F_B L_4}{E_{je} A_4} + L_4 \alpha_{je} \Delta T_4 = s$$

Iz zgornje enačbe lahko izračunamo F_B in zatem še sile v gredeh/poljih ter napetosti:

$$F_B = -35385 \text{ N}, \quad F_A = 464615 \text{ N}, \quad N_1 = 464615 \text{ N}, \quad N_2 = N_3 = N_4 = -35385 \text{ N}$$

$$\sigma_1 = 41{,}08 \text{ MPa}, \quad \sigma_2 = -3{,}13 \text{ MPa}, \quad \sigma_3 = -28{,}16 \text{ MPa}, \quad \sigma_4 = -28{,}16 \text{ MPa}$$

Dodatno vprašanje: kakšna je deformacijska enačba za spodnji primer (celoten element/gred je iz enega kosa in je pritrjen na podpori A in B, tako da ti podpori prenašata tako natezno, kot tlačno obremenitev)?



Odgovor: $\Delta L_1 + \Delta L_2 + \Delta L_3 + \Delta L_4 + \Delta L_5 = 0$